Karl Marx

Mathematische Manuskripte

Herausgegeben, eingeleitet
und kommentiert von
Wolfgang Endemann

Scriptor Verlag GmbH
Kronberg Ts.
1974

Umschlagentwurf Stefan Krause

Satzarbeiten
Main-Taunus-Satz Giebitz & Kleber, Eschborn/Ts.

Druck- und Bindearbeiten
Fotokop — W. Weihert KG, Darmstadt

Printed in Germany
ISBN 3-589-00018-X

INHALTSVERZEICHNIS

Karl Marx

Mathematische Manuskripte

I

ÜBER DEN BEGRIFF DER ABGELEITETEN FUNKTION

I

Wächst die unabhängige Variable x zu x_1, so die abhängige Variable y zu y_1.

Hier sub I) der ganz einfache Fall betrachtet, wo x nur in der ersten Potenz erscheint.

1) $y = ax$; wenn x zu x_1 wächst,

$$y_1 = ax_1 \quad \text{und} \quad y_1 - y = a(x_1 - x).$$

Fände jetzt die *Differentialoperation* statt, d. h. liessen wir x_1 bis auf x abnehmen, so

$$x_1 = x; \quad x_1 - x = 0,$$

also

$$a(x_1 - x) = a \cdot 0 = 0.$$

Ferner, da y bloss zu y_1 ward, weil x zu x_1, würde nun ebenfalls

$$y_1 = y; \quad y_1 - y = 0.$$

Also

$$y_1 - y = a(x_1 - x)$$

verwandelt in $0 = 0$.

Erst die Differentiation setzen und sie dann wieder aufheben führt also wörtlich zu *Nichts*. Die ganze Schwierigkeit im Verständnis der Differentialoperation (wie in dem der *Negation der Negation* überhaupt) liegt eben darin, zu sehn, *wie* sie sich von solch einfacher
1 Prozedur unterscheidet und deshalb zu wirklichen Resultaten führt.

Dividieren wir $a\,(x_1 - x)$ und entsprechend auch die linke Seite der Gleichung, durch den Faktor $x_1 - x$, so erhalten

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a.$$

Da y die *abhängige Variable*, kann es überhaupt keine unabhängige Bewegung vollziehen [hier, weil $y = ax$], y_1 kann daher nicht $= y$ werden, also auch nicht $y_1 - y = 0$, ohne dass vorher $x_1 = x$ geworden.

Andrerseits haben wir gesehn, dass x_1 nicht $= x$ werden konnte in der Funktion $a\,(x_1 - x)$, ohne letztre zu 0 zu machen. Der Faktor $x_1 - x$ war daher *notwendig* eine *endliche Differenz* zur Zeit, wo beide Seiten der Gleichung durch ihn dividiert worden. Im Moment der Herstellung des Verhältnisses

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

ist $x_1 - x$ daher stets eine endliche Differenz; folglich ist

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

ein *Verhältnis endlicher Differenzen*, und demgemäss

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Also:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a,$$

wo die Konstante a als *Grenzwert* des Verhältnisses der endlichen Differenzen der beiden Variablen figuriert.

2 Da a konstant, kann keine Veränderung mit ihm vorgehn, also auch nicht mit der auf es reduzierten *rechten Seite* der Gleichung. Unter solchen Umständen verläuft sich der *Differentialprozess* auf der linken Seite

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

und dies ist eine Eigentümlichkeit solch einfacher Funktionen wie ax.

Nimmt im Nenner des Verhältnisses x_1 ab, so nähert es sich x; die Grenze seiner Abnahme ist erreicht, sobald es zu x wird. Hiermit ist die Differenz $x_1 - x_1 = x - x = 0$ gesetzt und daher auch $y_1 - y = y - y = 0$. Wir erhalten so

$$\frac{0}{0} = a.$$

Da im Ausdruck $\frac{0}{0}$ jede Spur seines Ursprungs und seiner Bedeutung erlischt, ersetzen wir ihn durch $\frac{dy}{dx}$, wo die endlichen Differenzen $x_1 - x$ oder Δx und $y_1 - y$ oder Δy als *aufgehobne* oder *verschwundene* Differenzen symbolisiert erscheinen oder $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ verwandelt in $\frac{dy}{dx}$. Also

$$\frac{dy}{dx} = a.$$

Der von einigen rationalisierenden Mathematikern festgehaltne Trost, quantitativ seien dy und dx in der Tat nur unendlich klein, [ihr Verhältnis] nur annähernd $\frac{0}{0}$, ist Chimere, wie es sich sub II)
3 noch handgreiflicher zeigen wird.

Noch zu erwähnende Eigentümlichkeit des betrachteten Falls ist, dass $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$ und ebenso $\frac{dy}{dx} = a$, der Grenzwert [des Verhältnisses] der endlichen Differenzen daher zugleich auch der Grenzwert [des Verhältnisses] der Differentialen, ist.

2) Ein zweites Beispiel desselben Falls ist

$$\begin{array}{l} y = x \\ y_1 = x_1 \end{array}; \quad y_1 - y = x_1 - x;$$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1; \qquad \frac{0}{0} \text{ oder } \frac{dy}{dx} = 1.$$

II

Da $y = f(x)$, die Funktion x, aber in ihrem *entwickelten algebraischen Ausdruck*[6] sich auf der rechten Seite der Gleichung befindet, nennen wir diesen Ausdruck die *Originalfunktion von x*, seine erste durch Differentiation erhaltene Modifikation die *vorläufig «Abgeleitete» Funktion x* und seine schliesslich durch den *Differentialprozess* erhaltne Gestalt die *«Abgeleitete» Funktion von x.*

1) $y = ax^3 + bx^2 + cx - e.$

Wächst x zu x_1, so

$$y_1 = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 - e,$$

$$y_1 - y = a(x_1^3 - x^3) + b(x_1^2 - x^2) + c(x_1 - x) =$$
$$= a(x_1 - x)(x_1^2 + x_1 x + x^2) + b(x_1 - x)(x_1 + x) + c(x_1 - x).$$

Daher

$$\frac{y_1-y}{x_1-x} \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta x}=a\,(x_1^2+x_1x+x^2)+b\,(x_1+x)+c.$$

Die *vorläufig «Abgeleitete»*

$$a\,(x_1^2+x_1x+x^2)+b\,(x_1+x)+c$$

ist hier der *Grenzwert* des *Verhältnisses* der endlichen Differenzen, d. h., wie klein auch immer diese Differenzen genommen werden mögen, der Wert von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist gegeben in jener «Abgeleiteten». Aber er fällt hier nicht wie sub I) zusammen mit dem Grenzwert des Verhältnisses
4 der Differentialen *.

Wenn in der Funktion

$$a\,(x_1^2+x_1x+x^2)+b\,(x_1+x)+c$$

die Variable x_1 abnimmt, bis sie die *Grenze* ihrer Abnahme erreicht hat, d. h. *gleich* x geworden ist, verwandelt sich x_1^2 in x^2, x_1x in x^2, und x_1+x in $2x$ und wir erhalten die *«Abgeleitete» Funktion* x:

$$3ax^2+2bx+c.$$

Hier zeigt sich schlagend:

Erstens: um die «Abgeleitete» zu erhalten, muss $x_1=x$ gesetzt werden, also im *strikten mathematischen Sinn* $x_1-x=0$, ohne jede Flause von bloss unendlicher Annäherung.

Zweitens: dadurch, dass $x_1=x$ gesetzt wird, also $x_1-x=0$, tritt durchaus nichts Symbolisches in die «Abgeleitete» ein **. Die ursprünglich durch Variation von x eingeführte Grösse x_1 verschwindet nicht, sie wird nur *reduziert* auf ihren minimalen Grenzwert $=x$ und bleibt ein in die Originalfunktion x neu eingeführtes Element, welches durch seine Kombinationen teils mit sich selbst,

---

* Im Entwurf dieser Arbeit (4146, Pl. 4) folgt:

«Andrerseits geht der Differentialprozess jetzt vor in der vorläufig «Abgeleiteten» Funktion x (rechte Seite), während derselbe Prozess auf [der] linken Seite jene Bewegung notwendig begleitet».— *Red.*

** Im Entwurf lautet der folgende Satz:

«b) Die Findung «der Abgeleiteten» aus der Originalfunktion x verlief so, dass wir erst eine *endliche Differentiation* [das Setzen der endlichen Differenz] vornahmen; diese liefert eine vorläufig «Abgeleitete», welche der *Grenzwert* von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist. Der Differentialprozess, zu dem wir dann schreiten, *reduziert* diesen *Grenzwert auf seine Minimalgrösse.* Die in der ersten Differentiation eingeführte Grösse x_1 verschwindet nicht...».— *Red.*

teils mit dem x der Originalfunktion die schliessliche «Abgeleitete» liefert, d. h. die auf ihre *Minimalgrösse reduzierte vorläufige «Abgeleitete».*

Die Reduktion von x_1 auf x innerhalb der ersten (vorläufigen) «Abgeleiteten» Funktion verwandelt auf der linken Seite $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx}$, also:

$$\frac{0}{0} \text{ oder } \frac{dy}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c,$$

so dass die *Abgeleitete* als *Grenzwert* des Verhältnisses der Differentia-
5 len erscheint.

Das transzendentale oder symbolische Unglück ereignet sich nur auf der linken Seite, hat aber seine Schrecken bereits verloren, da es nun nur als Ausdruck eines Prozesses erscheint, der seinen wirklichen Gehalt bereits auf der rechten Seite der Gleichung be-
6 währt hat.

In der «Abgeleiteten»

$$3ax^2 + 2bx + c$$

existiert die Variable x unter ganz anderen Bedingungen als in der Originalfunktion x (nämlich als in $ax^3 + bx^2 + cx - e$). Sie [diese Abgeleitete] kann also ihrerseits selbst wieder als eine Originalfunktion auftreten und Mutter einer andern «Abgeleiteten» durch erneuten Differentialprozess werden. Dies kann sich so oft wiederholen als die Variable x nicht definitiv aus einer der «Abgeleiteten» entfernt ist, also endlos fortdauern bei Funktionen von x, die nur in endlosen Reihen darstellbar sind, was allzumeist der Fall.

Die Symbole $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ etc. zeigen nur das Stammregister der «Abgeleiteten» mit Bezug auf die erstgegebne Originalfunktion x an. Sie werden nur mysteriös, sobald man sie als *Ausgangspunkt* der Bewegung behandelt, statt als blosse *Ausdrücke sukzessiv abgeleiteter Funktionen x.* Dann erscheint es allerdings wunderbar, dass ein Verhältnis Verschwundner von neuem potenzierte Grade der Verschwindung durchlaufen soll, während nichts Wunderbares darin ist, dass z. B. $3x^2$ den Differentialprozess durchlaufen kann, so gut wie seine Stammutter x^3. Man hätte ja auch von $3x^2$ als Originalfunktion von x ausgehn
7 können.

Aber *notabene.* Ausgangsstätte des *Differentialprozesses* ist $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ faktisch nur in Gleichungen wie sub I), wo x nur in der ersten Potenz vorkommt. Dann jedoch, wie sub I) gezeigt, das Resultat:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a = \frac{dy}{dx}.$$

In der Tat ist hier also durch den Differentialprozess, den $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ durchlaufen, *kein neuer Grenzwert* gefunden worden, was nur möglich, solange die vorläufig «Abgeleitete» die Variable x einschliesst, solange also $\frac{dy}{dx}$ Symbol eines realen Prozesses bleibt*.

Es hindert dies natürlich in keiner Art, dass im Differentialcalculus die Symbole $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. und deren Kombination auch die rechte Seite der Gleichung bilden. Dann weiss man aber auch, dass solche rein symbolische Gleichungen nur die *Operationen* anzeigen, die nachher auf wirkliche Funktionen von Variablen anzuwenden sind.

2) $y = ax^m$.

Wird x zu x_1, so $y_1 = ax_1^m$ und

$$y_1 - y = a(x_1^m - x^m) =$$
$$= a(x_1 - x)(x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x + x_1^{m-3}x^2 + \text{etc. bis zum Glied } x_1^{m-m}x^{m-1}).$$

Also

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a(x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x + x_1^{m-3}x^2 + \ldots + x_1^{m-m}x^{m-1}).$$

Wenden wir nun den Differentialprozess auf diese «*vorläufig Abgeleitete*» an, so dass

$$x_1 = x \text{ oder } x_1 - x = 0$$

wird, so verwandelt sich

$$x_1^{m-1} \text{ in } x^{m-1};$$

$$x_1^{m-2}x \text{ in } x^{m-2}x = x^{m-2+1} = x^{m-1};$$
$$x_1^{m-3}x^2 \text{ in } x^{m-3}x^2 = x^{m-3+2} = x^{m-1}$$

und endlich

$$x_1^{m-m}x^{m-1} \text{ in } x^{m-m}x^{m-1} = x^{0+m-1} = x^{m-1}.$$

---

* Im Entwurf (Pl.7) lautet dieser Satz:
«Dies kann nur dort resultieren, wo die vorläufig «Abgeleitete» Funktion die Variable x einschliesst, daher auch durch deren Bewegung ein wirklicher' Neuwert gebildet werden kann, daher $\frac{dy}{dx}$ Symbol eines realen Prozesses ist».— *Red.*

Wir erhalten also m. mal die Funktion x^{m-1}, und die «Abgeleitete» ist daher max^{m-1}.

Durch die Gleichsetzung von $x_1 = x$ innerhalb der «vorläufig Abgeleiteten»* wird auf der linken Seite $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ verwandelt in $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx}$, daher

$$\frac{dy}{dx} = max^{m-1}$$

Sämtliche Operationen des Differentialcalculs könnten in dieser Weise behandelt werden, was aber eine verdammt nutzlose Weitläufigkeit wäre. Doch folgt hier noch ein Beispiel, weil in den bisherigen die Differenz $x_1 - x$ *nur einmal* in der Funktion x vorkam und daher durch die Bildung von

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

aus der rechten Seite verschwand. Dies nicht der Fall im folgenden:

3) $y = a^x$;

wird x zu x_1, so

$$y_1 = a^{x_1}.$$

Daher

$$y_1 - y = a^{x_1} - a^x = a^x(a^{x_1 - x} - 1).$$

[Aber]

$$a^{x_1 - x} = \{1 + (a-1)\}^{x_1 - x},$$

und

$$\{1 + (a-1)\}^{x_1 - x} = 1 + (x_1 - x)(a-1) + \frac{(x_1 - x)(x_1 - x - 1)}{1 \cdot 2}(a-1)^2 + \text{etc.}$$

Daher

$$y_1 - y = a^x(a^{x_1 - x} - 1) = a^x\left\{(x_1 - x)(a-1) + \frac{(x_1 - x)(x_1 - x - 1)}{1 \cdot 2}(a-1)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{(x_1 - x)(x_1 - x - 1)(x_1 - x - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(a-1)^3 + \text{etc.}\right\}.$$

$$\therefore \quad \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= a^x\left\{(a-1) + \frac{x_1 - x - 1}{1 \cdot 2}(a-1)^2 + \frac{(x_1 - x - 1)(x_1 - x - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(a-1)^3 + \text{etc.}\right\}.$$

* D. h. auf der rechten Seite.— *Red.*

Wird nun $x_1 = x$, also $x_1 - x = 0$, so erhalten wir für die «*Abgeleitete*»:

$$a^x \left\{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \text{etc.}\right\}.$$

Also:

$$\frac{dy}{dx} = a^x \left\{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \text{etc.}\right\}.$$

Nennen wir die Summe der Konstanten in der Klausel A, so:

$$\frac{dy}{dx} = Aa^x\,;$$

dies A aber = dem Napierschen Logarithmus der Wurzel a, also:

$\frac{dy}{dx}$, oder wenn wir für y seinen Wert setzen: $\frac{da^x}{dx} = \log a \cdot a^x$,

8 und

$$da^x = \log a \cdot a^x\,dx.$$

Nachträglich

Es wurden

1) Fälle betrachtet, wo der Faktor $(x_1 - x)$ nur einmal in [dem Ausdruck], der [zur] «*vorläufig Abgeleiteten*» [führt], i. e. [in] der endlichen Differenzgleichung enthalten ist, daher [wird] durch Division beider Seiten mit $x_1 - x$ gebildet

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

[kein Betreten der Differenz $x_1 - x$ enthält], derselbe Faktor also aus der Funktion x eliminiert wird.

2) (Im Beispiel: $d(a^x)$) Fälle, wo Faktoren $(x_1 - x)$ in der Funktion x bleiben nach Bildung von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

3) Es ist noch zu betrachten der Fall wo Faktor $x_1 - x$ ***nicht direkt*** aus der ersten Differenzgleichung ([die zu] (der «vorläufig Abgeleiteten») [führt]) zu evolvieren ist.

$$y = \sqrt{a^2 + x^2},$$

$$y_1 = \sqrt{a^2 + x_1^2},$$

$$y_1 - y = \sqrt{a^2 + x_1^2} - \sqrt{a^2 + x^2}\,;$$

wir dividieren die Funktion von x, also auch die linke Seite, durch

$x_1 - x$. Dann

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \left(\text{oder } \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{\sqrt{a^2 + x_1^2} - \sqrt{a^2 + x^2}}{x_1 - x}.$$

Um die Wurzelgrösse aus Zähler zu entfernen, Zähler und Nenner multipliziert mit $\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}$, und erhalten:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^2 + x_1^2 - (a^2 + x^2)}{(x_1 - x)\left(\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}\right)} = \frac{x_1^2 - x^2}{(x_1 - x)\left(\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}\right)}.$$

Aber

$$\frac{x_1^2 - x^2}{(x_1 - x)\left(\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}\right)} = \frac{(x_1 - x)(x_1 + x)}{(x_1 - x)\left(\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}\right)}.$$

Also:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_1 + x}{\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Wird x_1 nun $= x$, oder $x_1 - x = 0$, so

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Also

$$dy \text{ oder } d\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

II

ÜBER DAS DIFFERENTIAL

I

1) $f(x)$ oder $y = uz$ sei zu differenzieren, u und z sind beide abhängige Funktionen der unabhängigen Variablen x; sie sind unabhängige Variablen gegenüber ihrer Funktion y, die von ihnen abhängt, also auch von x.

$$y_1 = u_1 z_1,$$

$$y_1 - y = u_1 z_1 - uz = z_1(u_1 - u) + u(z_1 - z),$$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta x} = z_1 \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + u \frac{z_1 - z}{x_1 - x} = \frac{z_1 \Delta u}{\Delta x} + \frac{u \Delta z}{\Delta x}\,^{*}.$$

Wird nun auf der rechten Seite $x_1 = x$, also $x_1 - x = 0$, so $u_1 - u = 0$, $z_1 - z = 0$, also auch Faktor z_1 in [dem Ausdruck] $z_1 \frac{u_1 - u}{x_1 - x}$ zu z, endlich auf der linken Seite $y_1 - y = 0$. Also:

1 A) $\frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx}$.

Welche Gleichung multipliziert mit dem allen ihren Gliedern gemeinschaftlichen Nenner dx wird

B) dy oder $d(uz) = z\,du + u\,dz$.

2) Zunächst zu betrachten Gleichung A):

$$\frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx}.$$

In Gleichungen mit nur einer von x abhängigen Variablen war das Schlussresultat stets

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

---

* Letzter Teil der Gleichung anscheinend von Engels's hinzugefügt.— *Red.*

und $f'(x)$, die erste abgeleitete Funktion von $f(x)$, war von allen symbolischen Ausdrücken frei, z. B. mx^{m-1}, wenn x^m die Originalfunktion der unabhängigen Variablen x. Grade infolge der Differentiationsprozesse, die $f(x)$ zu durchlaufen hatte, um sich zu verwandeln in $f'(x)$, sprang letzterem, dem realen Differentialkoeffizienten, auf der linken Seite, sein Doppelgänger $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx}$ als symbolisches Äquivalent gegenüber. Andrerseits fand so $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx}$ in $f'(x)$ sein reales Äquivalent vor.

In Gleichung A) dagegen schliesst $f'(x)$, die erste Abgeleitete von uz, selbst symbolische Differentialkoeffizienten ein, die daher auf beiden Seiten stehn, während auf keiner ein Realwert. Da aber uz nach derselben Methode behandelt wurde, wie früher Funktionen x mit nur einer unabhängigen Variablen, stammt dieser Kontrast im Resultat offenbar her aus dem eigentümlichen Charakter der Ausgangsfunktion selbst, nämlich aus uz. Näheres darü-
2 ber sub 3).

Vorläufig aber noch zu sehn, ob kein Haken in der *Ableitung* der Gleichung A).

Auf ihrer rechten Seite wurden

$$\frac{u_1-u}{x_1-x} \text{ oder } \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad \text{und} \quad \frac{z_1-z}{x_1-x} \text{ oder } \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

zu $\frac{0}{0}$, $\frac{0}{0}$, weil $x_1=x$ ward, also $x_1-x=0$. Statt $\frac{0}{0}$, $\frac{0}{0}$ setzten wir aber ohne weiteres $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$. War das zulässig, da jene $\frac{0}{0}$ hier als *Multiplikatoren der Variablen* u und z resp. figurieren, während in den Fällen mit einer abhängigen Variablen der einzige symbolische Differentialkoeffizient, der sich ergab, — $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx}$ — keinen Multiplikator hatte ausser der Konstanten 1?

Setzen wir die ursprüngliche Knotengestalt von $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ in die rechte Seite, so wird sie: $z\frac{0}{0}+u\frac{0}{0}$. Multiplizieren wir also z und u mit dem Zähler des jedes derselben begleitenden $\frac{0}{0}$, so erhalten wir: $\frac{0}{0}+\frac{0}{0}$; und da die Variablen z und u selbst $=0$ geworden, so sind es auch ihre Abgeleiteten, also schliesslich:

$$\frac{0}{0}=0 \text{ und nicht } z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx}.$$

Diese Prozedur ist aber mathematisch falsch.
Nehmen wir z. B.

$$\frac{u_1-u}{x_1-x}=\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

so erhält man nicht erst den Zähler $= 0$, weil man damit begänne $u_1 - u = 0$ zu setzen, sondern der Zähler wird nur 0 oder $u_1 - u = 0$, weil der Nenner, die Differenz der unabhängigen variablen Grösse x, d. h. $x_1 - x = 0$ geworden.

Was also den Variablen u und z gegenüberspringt, ist nicht 0, sondern $\left(\frac{0}{0}\right)$, *dessen Zähler in dieser Form von seinem Nenner unzertrennlich bleibt.* Als Multiplikator könnte $\frac{0}{0}$ daher nur dann seine Koeffizienten nullifizieren, wenn und sofern

$$\frac{0}{0}=0.$$

Selbst in der gewöhnlichen Algebra wäre es falsch, falls ein Produkt $P\cdot\frac{m}{n}$ die Form $P\cdot\frac{0}{0}$ annähme, ohne weiteres zu schliessen, dass es $=0$ *sein muss*, obgleich es hier stets $=0$ gesetzt *werden kann*, weil wir beliebig die Nullifikation mit Zähler oder Nenner beginnen können.

Z. B. $P\cdot\frac{x^2-a^2}{x-a}$. Wird $[x=a$ woraus$]$ $x^2=a^2$, also $x^2-a^2=0$ gesetzt, so erhalten: $P\cdot\frac{0}{0}=\frac{0}{0}$ und letztres $=0$ setzbar, da $\frac{0}{0}$ ebensogut 0, als alles andre Zahl sein kann.

Lösen wir dagegen x^2-a^2 in seine Faktoren auf, so erhalten wir:

$$P\cdot\frac{x-a}{x-a}\cdot(x+a)=P(x+a), \text{ und da } x=a, \quad =2Pa.$$

Die sukzessive Differentiation — z. B. von x^3, wo $\frac{0}{0}$ erst bei der vierten Ableitung $=0$ wird, nachdem in der dritten die Variable x alle geworden und durch eine Konstante ersetzt — beweist, dass $\frac{0}{0}$ nur unter ganz bestimmten Bedingungen $= 0$ wird.

In unsrem Fall aber, wo der Ursprung der $\frac{0}{0}$, $\frac{0}{0}$ als respektiven Differentialausdrücke von $\frac{\Delta z}{\Delta x}$, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ bekannt ist, gebührt ihnen auch
3 von vornherein die Uniform $\frac{dz}{dx}$, $\frac{du}{dx}$.

3) In den früher behandelten Gleichungen, wie $y = x^m$, $y = a^x$ etc., steht einer *Originalfunktion von* x die von ihm «Abhängige» y gegenüber.

In $y = uz$ sind beide Seiten mit «Abhängigen» besetzt. Wenn hier y direkt von u und z abhängt, so u und z ihrerseits wieder von x. Dieser spezifische Charakter der Originalfunktion uz prägt sich notwendig auch seiner «Abgeleiteten» auf.

Dass u eine Funktion von x, und z eine andre Funktion von x, ist darstellbar in:

$$u = f(x), \quad u_1 - u = f(x_1) - f(x),$$

daher

$$z = \varphi(x); \quad z_1 - z = \varphi(x_1) - \varphi(x).$$

Aber die Ausgangsgleichung liefert weder für $f(x)$ noch für $\varphi(x)$ Originalfunktionen von x, d. h. bestimmte Werte * in x. Folglich figurieren u und z bloss als Namen, als Symbole von x abhängiger Funktionen; daher werden auch nur die *allgemeinen Formen dieses Abhängigkeitsverhältnisses*:

$$\frac{u_1 - u}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}, \qquad \frac{z_1 - z}{x_1 - x} = \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x)}{x_1 - x}$$

zunächst durch den Ableitungsprozess aus uz geliefert. Erreicht der Prozess nun den Punkt, wo $x_1 = x$ gesetzt, also $x_1 - x = 0$, so verwandeln sich jene allgemeine Formen in

$$\frac{du}{dx} = \frac{df(x)}{dx}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx},$$

und die symbolischen Differentialkoeffizienten $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ erscheinen als solche der «Abgeleiteten» einverleibt.

In Gleichungen mit nur einer abhängigen Variablen hat aber $\frac{dy}{dx}$ durchaus keinen andren Inhalt als hier $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$. Es ist auch bloss

* Gemeint ist: «bestimmte Ausdrücke». — *Red.*

der symbolische Differentialausdruck von

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Obgleich aber die Natur der $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, d. h. symbolischer Differentialkoeffizienten überhaupt, sich keineswegs ändert, wenn sie *innerhalb der Abgeleiteten selbst* erscheinen, also auch auf der rechten Seite der Differentialgleichung, ändert sich damit jedoch ihre Rolle und der Charakter der Gleichung.

Repräsentieren wir die Originalfunktion von uz allgemein durch $f(x)$, so ihre erste «Abgeleitete» durch $f'(x)$,

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

erscheint dann als:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Dieselbe allgemeine Form erhalten wir für Gleichungen mit nur einer abhängigen Variablen. In beiden Fällen entstehn die Ausgangsformen von $\frac{dy}{dx}$ aus den Ableitungsprozessen, die $f(x)$ in $f'(x)$ verwandeln. Sobald daher $f(x)$ zu $f'(x)$ geworden, steht letzterem auch $\frac{dy}{dx}$ als sein eigner symbolischer Ausdruck, als sein Doppelgänger oder symbolisches Äquivalent gegenüber.

4 In beiden Fällen spielt $\frac{dy}{dx}$ daher *dieselbe Rolle*.

Anders mit $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$. Zusammen mit den andern Elementen von $f'(x)$, dem sie einverleibt sind, finden sie in $\frac{dy}{dx}$ ihren symbolischen Ausdruck oder ihr symbolisches Äquivalent vor, aber sie selbst stehn keinem $f'(x)$, $\varphi'(x)$ gegenüber, dessen symbolische Doppelgänger sie ihrerseits wären. Sie sind einseitig zur Welt gekommen, Schattenfiguren ohne Körper, der sie geworfen, symbolische Differentialkoeffizienten ohne realen Differentialkoeffizienten, d. h. ohne entsprechende äquivalente «Abgeleitete». Der symbolische Differentialkoeffizient wird so zum *selbständigen Ausgangspunkt*, dessen reales Äquivalent erst zu finden ist. So ist die Initiative von dem rechten Pol, dem algebraischen, auf den linken, den symbolischen, verschoben. Damit erscheint aber auch der Differentialcalculus als eine spezifische Rechnungsart, die bereits selbständig auf ihrem eignen Boden operiert. Denn seine Ausgangspunkte $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ sind nur ihm angehörige und ihn charakterisierende mathematische Grössen. Und dieser Umschlag der Methode ergab sich hier als Resultat der algebraischen Differentiation von uz. Die algebraische Methode schlägt also von selbst in die ihr entgegengesetzte Differentialmethode um *.

Was sind nun die entsprechenden «Abgeleiteten» der symbolischen Differentialkoeffizienten $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$? Die Ausgangsgleichung $y = uz$ liefert keine Data zur Lösung dieser Frage. Doch bleibt letztere beantwortbar, wenn man für u und z beliebige Originalfunktionen von x setzt, z. B.:

$$u = x^4, \qquad z = x^3 + ax^2.$$

Damit verwandeln sich aber auch sofort die symbolischen Differentialkoeffizienten $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ in *Operationssymbole*, in Symbole von Prozessen, verrichtbar mit x^4 und $x^3 + ax^2$ zur Auffindung ihrer «Abgeleiteten». Ursprünglich entstanden als symbolischer Ausdruck der «Abgeleiteten», also bereits vollzogner, spielt der symbolische Differentialkoeffizient jetzt die Rolle des Symbols erst zu vollziehender Differentiationsoperationen.

Zugleich verwandelt sich die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

* Im Entwurf der Arbeit «Über das Differential» (4148, Pl. 16–17) läutet dieser Absatz:

«Umgekehrt mit $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$. Geboren innerhalb der Abgeleiteten, finden sie zusammen mit den übrigen Elementen derselben ihren eignen symbolischen Ausdruck, daher ihr symbolisches Äquivalent in $\frac{dy}{dx}$ vor. Aber sie selbst existieren ohne äquivalente, wirkliche Differentialkoeffizienten, d. h. ohne Abgeleitete $f'(x)$, $\varphi'(x)$, deren simbolische Ausdrücke sie ihrerseits wären. Sie sind die fertigen Differentialsymbole, deren Realwerte als Schatten figurieren, deren Körper erst zu suchen. Das Problem hat sich also unterderhand verkehrt. Symbolische Differentialkoeffizienten werden selbständige *Ausgangspunkte*, wofür das Äquivalent, der wirkliche Differentialkoeffizient ober die entsprechende abgeleitete Funktion, erst zu finden ist. Damit ist die Initiative von dem rechten Pol auf den linken verschoben. Da dieser Umschlag der Methode aus der algebraischen Bewegung der Funktion uz entsprang, ist er selbst algebraisch nachgewiesen». — *Red.*

— von vornherein bloss symbolisch, weil ohne symbolfreie Seite — in eine allgemeine symbolische Operationsgleichung.

Ich bemerke noch, dass * von früher Zeit im 18. Jahrhundert bis heutigen Tag die allgemeine Aufgabe des Differentialcalculus gewöhnlich so formuliert wird: für den symbolischen Differentialkoeffizienten sein reales Äquivalent zu finden.

4)

A) $\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\,\frac{dz}{dx}$.

Dies ist offenbar nicht der einfachste Ausdruck der Gleichung A), da alle ihre Glieder den Nenner dx gemein haben. Dieser weggestrichen, so:

B) $d(uz)$ oder $dy = z\,du + u\,dz$.

In B) ist jede Spur seiner Herkunft aus A) ausgelöscht. Es gilt daher ebensosehr, wenn u und z von x abhängen, als wenn sie ohne alles Verhältnis zu x nur wechselseitig voneinander abhängen. Es ist von vornherein eine symbolische Gleichung und kann von vornherein als eine symbolische Operationsgleichung dienen. Im letzteren Fall besagt es, dass wenn

$$y = zu \text{ etc.},$$

d. h. = einem aus beliebiger Anzahl Variabler zusammengesetzten Produkt, dy = einer Summe von Produkten, worin der Reihe nach je einer der Faktoren als variabel, die andern Faktoren aber als kons-
6 tant behandelt werden etc.

Für unsern Zweck, nämlich weitere Untersuchung des Differentials von y überhaupt, passt jedoch die Form B) nicht. Setzen wir daher:

$$u = x^4, \qquad z = x^3 + ax^2,$$

so [operieren wir weiter so:]

$$du = 4x^3\,dx, \qquad dz = (3x^2 + 2ax)\,dx,$$

wie früher nachgewiesen bei Gleichungen mit nur einer abhängigen Variablen. Diese Werte von du, dz gebracht in die Gleichung A), so

A) $\frac{dy}{dx} = (x^3 + ax^2)\,\frac{4x^3\,dx}{dx} + x^4\,\frac{(3x^2 + 2ax)\,dx}{dx}$; also:

$$\frac{dy}{dx} = (x^3 + ax^2)\,4x^3 + x^4\,(3x^2 + 2ax);$$

* Im Entwurf folgt: «dass abgesehn von wenigen Ausnahmen».— *Red.*

daher

$$dy = \{(x^3 + ax^2)\, 4x^3 + x^4\, (3x^2 + 2ax)\}\, dx.$$

Der Ausdruck in Klammern ist die erste Abgeleitete von uz; da aber $uz = f(x)$, ist seine Abgeleitete $= f'(x)$; setzen wir letztres nun an die Stelle der algebraischen Funktion, so:

$$dy = f'(x)\, dx.$$

Wir erhielten bereits dasselbe Resultat aus beliebiger Gleichung mit nur einer abhängigen Variablen, z. B.:

$$y = x^m,$$

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1} = f'(x),$$

$$dy = f'(x)\, dx.$$

Allgemeine haben wir: wenn $y = f(x)$, ob diese Funktion von x nun eine Originalfunktion in x sei oder abhängige Variable enthalte, stets $dy = df(x)$ und $df(x) = f'(x)\, dx$, also:

B) $dy = f'(x)\, dx$, die allgemeingültige Form des Differentials y. Es wäre dies sofort nachweisbar, auch wenn gegeben für $f(x)$: $f(x, z)$, d. h. eine Funktion *zweier voneinander unabhängigen Variablen.* Dies
7 aber für unsern Zweck überflüssig.

II

1) Das Differential

$$dy = f'(x)\, dx$$

schaut von vornherein verdächtiger aus als **der Differentialkoeffizient**

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

wovon es abgeleitet.

In $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ sind Nenner und Zähler unzertrennlich verbunden; in $dy = f'(x)\, dx$ sind sie augenscheinlich getrennt, so dass sich der Schluss aufdrängt, es sei nur ein maskierter Ausdruck für

$$0 = f'(x) \cdot 0 \quad \text{oder} \quad 0 = 0,$$

womit «nix ze wolle».

Ein französischer Mathematiker aus dem ersten Drittel des 19. Jahrhunderts, der ganz anders klar als der [dir] bekannte «elegante»

Franzos die Differentialmethode mit der algebraischen Methode Lagrange's verknüpft hat,— Boucharlat sagt:

Wenn $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ z. B., so ist «$\frac{dy}{dx}$ alias $\frac{0}{0}$, oder vielmehr sein Wert $3x^2$ der Differentialkoeffizient der Funktion y. Da $\frac{dy}{dx}$ also das Symbol, welches die Grenze $3x^2$ repräsentiert, *müsste dx stets unter dy stehn* *, aber *um die algebraischen Operationen zu erleichtern*, behandeln wir $\frac{dy}{dx}$ als gewöhnlichen Bruch und $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ als eine gewöhnliche Gleichung; man erhält dann durch die Befreiung der Gleichung von ihrem Nenner das Resultat:

$$dy = 3x^2\, dx,$$

welcher Ausdruck das Differential von y heisst».

Um also «die algebraischen Operationen zu erleichtern», führt man eine nachgewiesnermassen falsche Formel ein, die man «Differential» tauft.

In der Tat ist der casus nicht so bösartig.

In $\frac{0}{0}$ ** ist der Zähler unzertrennlich vom Nenner, aber warum? Weil beide nur ungetrennt ein Verhältnis ausdrücken, dans l'espèce das auf sein absolutes Minimum reduzierte Verhältnis:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x},$$

wo der Zähler zu 0 geworden, weil der Nenner. Getrennt sind beide 0, verlieren daher ihren symbolischen Sinn, ihren Verstand.

Sobald aber $x_1 - x = 0$ in dx eine Form gewinnt, welche es unabänderlich manifestiert als verschwundne Differenz der unabhängigen Variablen x, also auch dy als verschwundne Differenz der Funktion von x oder der Abhängigen y, wird die Trennung des Nenner vom Zähler eine durchaus zulässige Operation. Wo immer dx jetzt stehe, solcher Ortswechsel lässt das Verhältnis von dy zu ihm unberührt. $dy = f'(x)\, dx$ erscheint so uns als eine andre Form von

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

8 und ist stets in letztres umsetzbar.

---

* Im Entwurf: «stehen bleiben».— *Red.*

** Im Entwurf: «In der Form $\frac{0}{0}$». — *Red.*

2) Das Differential $dy = f'(x)\,dx$ ergab sich durch direkte algebraische Ableitung aus A) (sieh I, 4), während die algebraische Ableitung der Gleichung A) schon bewiesen hatte, dass Differentialsymbole, dans l'espèce der symbolische Differentialkoeffizient, welche ursprünglich entstehn als bloss symbolische Ausdrücke algebraisch vollzogner Differentiationsprozesse, notwendig wieder in selbständige Ausgangspunkte, in Symbole erst zu verrichtender Operationen oder in Operationssymbole umschlagen, daher auch die auf algebraischem Weg entstandnen symbolischen Gleichungen in symbolische Operationsgleichungen.

Wir sind also doppelt berechtigt, das Differential $dy = f'(x)\,dx$ als symbolische Operationsgleichung zu behandeln. Wir wissen dabei jetzt a priori, dass wenn

$$y = f(x) \quad [\text{und}] \quad dy = df(x),$$

dass wenn die durch $df(x)$ angezeigte Differentialoperation an $f(x)$ vollzogen wird, das Resultat: $dy = f'(x)dx$, und dass sich hieraus schliesslich ergibt:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Aber auch erst vom Augenblick, wo das Differential als Ausgangspunkt des Calculus funktioniert, ist die Umkehrung der algebraischen Differentiationsmethode vollendet, und erscheint daher der Differentiationskalkulus selbst als eine ganz aparte, spezifische Rechnungsweise mit variablen Grössen.

Um dies zu veranschaulichen, fasse ich die von mir angewandte algebraische Methode allgemein zusammen, indem statt bestimmter algebraischer Ausdrücke in x nur $f(x)$ gesetzt, und die «vorläufig Abgeleitete» (sieh das erste Manuskript *) als $f^1(x)$ bezeichnet wird im Unterschied von der definitiv «Abgeleiteten» $f'(x)$. Dann, wenn

$$f(x) = y, \quad f(x_1) = y_1,$$

[so]

$$f(x_1) - f(x) = y_1 - y \text{ oder } \Delta y,$$

$$f^1(x)(x_1 - x) = y_1 - y \text{ oder } \Delta y.$$

Die vorläufig Abgeleitete $f^1(x)$ *muss*** Ausdrücke in x_1 und x enthalten ganz wie ihr Faktor $x_1 - x$, mit der *einzigen Ausnahme*,

* Sieh «Über dem Begriff der abgeleiteten Funktion», S. 51. — *Red.*
** Im Entwurf: «*muss* in der *Regel*».— *Red.*

wenn $f(x)$ eine Originalfunktion *ersten Grades* ist

$$f^1(x) = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Wird nun in $f^1(x)$ gesetzt

$$x_1 = x, \text{ also } x_1 - x = 0,$$

so erhalten:

$$f'(x) = \frac{0}{0} \text{ oder } \frac{dy}{dx}$$

und schliesslich:

$$f'(x)\,dx = dy \quad \text{oder} \quad dy = f'(x)\,dx.$$

Das Differential von y ist also der Schlusspunkt der algebraischen Entwicklung; es wird der Ausgangspunkt des sich auf eignem Boden bewegenden Differentialcalculus. dy — isoliert betrachtet, d.h. ohne sein Äquivalent — die Differentielle von y, spielt hier sofort dieselbe Rolle wie Δy in der algebraischen Methode, und dx, die Differentielle von x, dieselbe Rolle wie dort Δx.

Hätten wir

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f^1(x)$$

von seinem Nenner befreit, so [erhielten wir]:

I) $\Delta y = f^1(x)\,\Delta x$.

Dagegen ausgehend vom Differentialcalculus als fertiger, aparter Rechnungsart — und dieser Ausgang ward selbst algebraisch abgeleitet,— beginnen wir sofort mit dem Differentialausdruck von I), nämlich:

9 II) $dy = f'(x)\,dx$.

3) Da sich die symbolische Gleichung des Differentials gleich bei der algebraischen Behandlung der elementarsten Funktionen mit nur einer abhängigen Variablen einstellt, scheint es, dass auch der Umschlag in der Methode viel einfacher als es an dem Beispiel

$$y = uz$$

geschah, entwickelt werden konnte.

Die elementarsten Funktionen sind die von einem Grad; sie sind:

a) $y = x$, welches liefert den Differentialkoeffizienten $\frac{dy}{dx} = 1$, also: das Differential $dy = dx$.

b) $y = x \pm ab$; es liefert den Differentialkoeffizient $\frac{dy}{dx} = 1$, also wieder: das Differential $dy = dx$.

c) $y = ax$; es liefert den Differentialkoeffizient $\frac{dy}{dx} = a$, also: das Differential $dy = a\,dx$.

Nehmen wir den allereinfachsten Fall (unter a)). So:

$$y = x,$$

$$y_1 = x_1;$$

$$y_1 - y \text{ oder } \Delta y = x_1 - x \text{ oder } \Delta x.$$

I) $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ oder $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$; also auch $\Delta y = \Delta x$. Wird nun in $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $x_1 = x$ gesetzt oder $x_1 - x = 0$, so:

II) $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx} = 1$; also $dy = dx$.

Wir sind von vornherein, sobald wir I) erhalten, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, gezwungen auf der linken Seite weiterzuoperieren, weil die rechte von der Konstanten 1 besetzt ist. Und damit scheint doch der *Umschlag in der Methode*, der die Initiative von der rechten Seite auf die linke wirft, von Haus aus ein für allemal bewiesen, in der Tat das erste Wort der algebraischen Methode selbst.

Sehn wir uns die Sache näher an.

Das wirkliche Resultat war:

I) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$.

II) $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx} = 1$.

Da beide, I) und II), zum selben Resultat führen, haben wir die Wahl zwischen beiden. Jedenfalls erscheint das Setzen von $x_1 - x = 0$ als eine überflüssige und daher willkürliche Operation. Ferner: operieren wir in II) weiter von der linken Seite aus, da auf der rechten «nix ze wolle», so erhalten:

$$\frac{0}{0} \text{ oder } \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Die Schlussfolgerung wäre, das $\frac{0}{0} = 0$, also die Methode, wodurch $\frac{0}{0}$ erhalten wurde, irrig. Beim ersten coup führt sie zu nichts Neuem und gleich beim zweiten zu Nichts.

Endlich: wir wissen aus der Algebra, dass wenn zweite Seiten von zwei Gleichungen identisch, es auch die ersten sein müssen.

Folgt daher, dass

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Da aber x und das von ihm abhängige y beides variable Grössen sind, kann sich Δx, obgleich eine endliche Differenz, endlos verkürzen, in andern Worten, sich 0 *nähern*, soviel man will, also *unendlich klein* werden, daher auch das von ihm abhängige Δy. Da ferner $\frac{dy}{dx}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$, so folgt daraus, dass $\frac{dy}{dx}$ wirklich nicht das extravagante $\frac{0}{0}$ bedeutet, sondern umgekehrt die Sonntagsuniform von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, sobald dies als Verhältnis unendlich kleiner Differenzen funktioniert, also anders als in der gewöhnlichen Differenzenrechnung.

Das Differential $dy = dx$ seinerseits hat aber keinen Sinn, oder vielmehr grade nur soviel Sinn, als wir für die beiden Differentiellen in der Analyse von $\frac{dy}{dx}$ entdeckten. Nähmen wir dies in der zuletzt gegebnen Deutung, so könnten wir mit dem Differential schon Wunderoperationen verrichten, wie z. B. die Rolle von $a\,dx$ in der Bestimmung der Subtangente der Parabel zeigt, wozu keineswegs erheischt, dass die Natur von dx, dy wirklich begriffen sei.

4) Bevor ich übergehe zu Abschnitt III, der den historischen Entwicklungsgang des Differentialcalculus auf verkürztestem Masstab skizziert, noch ein Beispiel der bisher angewandten algebraischen Methode. Um sie schlagend zu kennzeichnen, stelle ich die bestimmte Funktion auf die linke Seite, welche stets die Seite der Initiative, weil wir von der Linken zur Rechten schreiben, deshalb auch die allgemeine Gleichung:

$$x^m+Px^{m-1}+\text{etc.}+Tx+U=0,$$

und nicht

$$0=x^m+Px^{m-1}+\text{etc.}+Tx+U.$$

Wenn Funktion y und unabhängige Variable x verteilt sind auf zwei Gleichungen, wovon die erste y als Funktion der Variablen u darstellt, die zweite dagegen u als Funktion von x, sei *der beiden gemeinschaftliche symbolische Differentialkoeffizient zu finden.*
Nimm an:

$$\begin{array}{lll} 1)\quad 3u^2=y, & & 3u_1^2=y_1, \\ & \text{dann} & \\ 2)\quad x^3+ax^2=u; & & x_1^3+ax_1^2=u_1. \end{array}$$

Behandeln wir zunächst Gleichung 1):

$$3u_1^2 - 3u^2 = y_1 - y,$$
$$3(u_1^2 - u^2) = y_1 - y,$$
$$3(u_1 - u)(u_1 + u) = y_1 - y,$$
$$3(u_1 + u) = \frac{y_1 - y}{u_1 - u} \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta u}.$$

Wird nun auf der linken Seite gesetzt $u_1 = u$, also $u_1 - u = 0$, dann:

$$3(u + u) = \frac{dy}{du},$$
$$3(2u) = \frac{dy}{du},$$
$$6u = \frac{dy}{du}.$$

Setzen wir nun für u seinen Wert $x^3 + ax^2$, so:

3) $6(x^3 + ax^2) = \frac{dy}{du}$

Wenden wir uns jetzt zu Gleichung 2), so:

$$x_1^3 + ax_1^2 - x^3 - ax^2 = u_1 - u,$$
$$(x_1^3 - x^3) + a(x_1^2 - x^2) = u_1 - u,$$
$$(x_1 - x)(x_1^2 + x_1x + x^2) + a(x_1 - x)(x_1 + x) = u_1 - u,$$
$$(x_1^2 + x_1x + x^2) + a(x_1 + x) = \frac{u_1 - u}{x_1 - x} \text{ oder } \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Setzen wir $x_1 = x$ auf der linken Seite, so $x_1 - x = 0$; daher

$$(x^2 + xx + x^2) + a(x + x) = \frac{du}{dx}.$$

4) $3x^2 + 2ax = \frac{du}{dx}$.

Multiplizieren wir jetzt die Gleichungen 3) und 4) miteinander, so:

5) $6(x^3 + ax^2)(3x^2 + 2ax) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}$.

So algebraisch gefunden die Operationsformel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

die stellenweise auch anwendbar auf Gleichungen mit zwei unabhän-
10 gigen Variablen.

Dass es nun keine Hexerei ist, eine an bestimmte Funktionen nachgewiesene Entwicklung in eine ganz allgemeine Form umzusetzen, zeige das obige Beispiel. Nimm an:

1) $y = f(u)$, so $y_1 = f(u_1)$, daher $y_1 - y = f(u_1) - f(u)$,

2) $u = \varphi(x)$, $u_1 = \varphi(x_1)$, $u_1 - u = \varphi(x_1) - \varphi(x)$.

Aus der Differenz sub 1) ergibt sich:

$$\frac{y_1 - y}{u_1 - u} = \frac{f(u_1) - f(u)}{u_1 - u}; \qquad \frac{dy}{du} = \frac{df(u)}{du},$$

da aber $df(u) = f'(u)\,du$, so

$$\frac{dy}{du} = \frac{f'(u)\,du}{du};$$

folglich:

3) $\frac{dy}{du} = f'(u)$.

Aus der Differenz sub 2) folgt:

$$\frac{u_1 - u}{x_1 - x} = \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x)}{x_1 - x}, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx},$$

und da $d\varphi(x) = \varphi'(x)\,dx$, so

$$\frac{du}{dx} = \frac{\varphi'(u)\,dx}{dx},$$

also:

4) $\frac{du}{dx} = \varphi'(x)$.

Multiplizieren wir Gleichung 3) mit 4), so:

5) $\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ oder $\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x)$ q.e.d.

11

N. III. Schluss dieser zweiten Lieferung **folgt, sobald John Landen** nachgesehn auf Museum.

III

ERSTER ENTWURF

Sobald zur Differentiation der $f\ (u, z)$ [$=uz$], wo die Variablen u und z beide Funktionen von x sind, geschritten wird, erhalten wir im Unterschied von den frühern Fällen, wo nur eine *abhängige Variable*, nämlich y, Differentialausdrücke auf beiden Seiten, nämlich:

in *erster Instanz:*

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx};$$

in *zweiter reduziert:*

$$dy = z\,du + u\,dz,$$

welches letztere auch nicht dieselbe Form hat wie bei einer abhängigen Variablen, z.B. $dy = max^{m-1}dx$, denn hier gibt uns $\frac{dy}{dx}$ sofort die von Differentialsymbolen befreite $f'(x) = max^{m-1}$, was in $dy = = z\,du + u\,dz$ keineswegs der Fall. Aus den Gleichungen mit einer abhängigen Variablen haben wir ein für allemal gesehn, wie die abgeleiteten Funktionen von [Funktionen in] x, im obigen Fall von x^m, gewonnen werden durch wirkliche Differentiation [Differenzsetzung] und deren spätere Aufhebung, und wie zugleich für die abgeleitete Funktion das symbolische Äquivalent $\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx}$ entspringt. Dass $\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx}$ gesetzt wird, erscheint hier nicht nur zulässig, sondern notwendig, da $\frac{0}{0}$ in seiner eignen waldursprünglichen Form = jeder Grösse, indem $\frac{0}{0} = X$, stets $0 = 0$ liefern muss. Hier aber erscheint $\frac{0}{0}$, gleich einem ganz bestimmten Spezialwert, $= mx^{m-1}$ und ist selbst das symbolische Resultat der Operationen, wodurch dieser

Wert abgeleitet wird aus x^m; als solches Resultat ist es ausgedrückt in $\frac{dy}{dx}$. Hier wird also $\frac{dy}{dx}\left(=\frac{0}{0}\right)$ in seinem Ursprung nachgewiesen als symbolischer Wert oder Differentialausdruck des bereits abgeleiteten $f'(x)$ nicht umgekehrt $f'(x)$ vermittelst des Symbols $\frac{dy}{dx}$ gefunden.

Zugleich aber, sobald wir einmal dies Resultat gewonnen, also uns schon auf dem Boden des Differentialcalculus bewegen, können wir umgekehrt, wenn wir z. B.

$$x^m = f(x) = y$$

zu differenzieren haben, von vornherein wissen

$$dy = mx^{m-1}\,dx$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}.$$

Hier gehn wir also von dem Symbol aus; es figuriert nicht mehr als das Resultat der Ableitung der Funktion x, sondern bereits als *symbolischer Ausdruck*, der anzeigt, welche Operationen mit $f(x)$ vorzunehmen, um den Realwert von $\frac{dy}{dx}$, i.e. $f'(x)$, zu erhalten. Im ersten Fall wird $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx}$ erhalten als symbolisches Äquivalent von $f'(x)$, und dies notwendig das erste, um den Ursprung von $\frac{dy}{dx}$ zu entdecken; im zweiten Fall wird $f'(x)$ erhalten als Realwert des Symbols $\frac{dy}{dx}$. Dann aber, wo die Symbole $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. zu Operationsformeln des Differentialcalculus geworden, können sie als solche Formeln auch auf der *rechten Seite der Gleichung* erscheinen, wie dies schon der Fall in dem einfachsten Fall $dy = f'(x)\,dx$. Wenn solche Gleichung in ihrer Schlussgestalt nicht wie in diesem Fall uns sofort $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ etc. gibt, so dies der Beweis, dass sie eine Gleichung ist, die nur symbolisch ausdrückt, welche Operationen in der Anwendung auf *bestimmte Funktionen* vorzunehmen sind.

Und dies sofort der Fall — und der einfachste Fall — bei $d(uz)$, wo u und z beide Variable, aber beide zugleich Funktionen derselben dritten Variablen, z.B. von x, sind.

Sei zu differenzieren $f(x)$ oder $y = uz$, wo u und z *beide von x abhängige Variable.* Dann

$$y_1 = u_1 z_1$$

und

$$y_1 - y = u_1 z_1 - uz.$$

Also:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{u_1 z_1}{x_1 - x} - \frac{uz}{x_1 - x},$$

oder

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u_1 z_1 - uz}{x_1 - x}.$$

Aber

$$u_1 z_1 - uz = z_1 (u_1 - u) + u (z_1 - z),$$

da dies **gleich**

$$z_1 u_1 - z_1 u + u z_1 - uz = z_1 u_1 - uz.$$

Also:

$$\frac{u_1 z_1 - uz}{x_1 - x} = z_1 \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + u \frac{z_1 - z}{x_1 - x}.$$

Wird nun auf zweiter Seite $x_1 - x = 0$, oder $x_1 = x$, so wird $u_1 - u = 0$, also $u_1 = u$, und $z_1 - z = 0$, also $z_1 = z$; wir erhalten daher

$$\frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx}$$

und daher

$$d(uz) \text{ oder } dy = z\,du + u\,dz.$$

Es ist nun zu bemerken für diese Differentiation von uz — im Unterschied von unsern früheren Fällen, wo wir *nur eine abhängige Variable* hatten, — dass wir hier sofort Differentialsymbole auf beiden Seiten der Gleichung finden, nämlich:

in *erster Instanz:*

$$\frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx};$$

in *zweiter*

$$d(uz) \text{ oder } dy = z\,du + u\,dz,$$

welches auch nicht dieselbe Form hat, wie bei einer unabhängigen Variablen, wie z.B. $dy = f'(x)\,dx$; denn hier gibt uns Division durch dx sofort $\frac{dy}{dx} = f'(x)$: den vom symbolischen Koeffizient freien Spezialwert der aus function x abgeleiteten $f'(x)$, was keineswegs der Fall ist in $dy = z\,du + u\,dz$.

In den Funktionen mit *nur einer abhängigen Variablen* wurde gezeigt, wie aus einer Funktion x, z.B. $f(x) = x^m$, eine zweite Funktion x, $f'(x)$ oder im gegebnen Fall mx^{m-1} abgeleitet wird *vermittelst wirklicher Differentiation und späterer Aufhebung derselben* und wie aus diesem Prozess zugleich für die abgeleitete Funktion das symbolische Äquivalent $\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx}$ auf der linken Seite der Gleichung entspringt.

Ferner: das Setzen von $\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx}$ war hier nicht nur zulässig, sondern mathematisch notwendig, da $\frac{0}{0}$ in seiner eignen waldursprünglichen Form jeden Grössenwert haben kann, weil $\frac{0}{0} = X$ stets $0 = 0$ liefern muss. Hier aber erscheint $\frac{0}{0}$ als symbolisches Äquivalent eines ganz bestimmten Realwerts, wie z.B. oben mx^{m-1}, und ist selbst nur Resultat der Operationen, wodurch dieser Wert abgeleitet aus x^m; als solches Resultat ist es festgehalten in der Form $\frac{dy}{dx}$.

Hier also, wo $\frac{dy}{dx}\left(=\frac{0}{0}\right)$ in seinem Ursprung nachgewiesen, wird keineswegs $f'(x)$ vermittelst des Symbols $\frac{dy}{dx}$ gefunden, sondern im Gegenteil der Differentialausdruck $\frac{dy}{dx}$ als symbolisches Äquivalent der bereits abgeleiteten Funktion x.

Sobald dies Resultat aber einmal gewonnen, können wir umgekehrt verfahren. Ist eine $f(x)$, z.B. x^m, zu differenzieren, so suchen wir erst den Wert von dy und findèn $dy = mx^{m-1}\,dx$, also $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$. Hier figuriert der symbolische Ausdruck als Ausgangspunkt. [Wir] bewegen uns so bereits auf dem Boden des Differentialcalculs, d.h. $\frac{dy}{dx}$ etc. dienen bereits als *Formeln*, welche bekannte mit der Funktion x vorzunehmende Differentialoperationen anzeigen. Im ersten

Fall ward $\frac{dy}{dx}\left(=\frac{0}{0}\right)$ erhalten als symbolisches Äquivalent von $f'(x)$, im zweiten wird $f'(x)$ gesucht und erhalten als Realwert der Symbole $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc.

Dienen diese Symbole aber bereits als Operationsformeln des Differentialcalculs, so können sie als solche Formeln auch auf der rechten Seite der Gleichung erscheinen, wie dies bereits geschah in dem einfachsten Fall $dy=f'(x)\,dx$. Wenn solche Gleichung in ihrer Schlussgestalt nicht wie im erwähnten Fall sofort reduzierbar auf $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ etc., i.e. auf einen Realwert, so beweist das, dass sie eine Gleichung ist, die nur symbolisch ausdrückt, welche Operationen vorzunehmen, sobald
1 ⌊ *bestimmte Funktionen* an die Stelle ihrer unbestimmten [Zeichen] treten.

Der einfachste Fall, wo dies eintritt, ist bei $d(uz)$, wo u und z beide variabel, aber beide zugleich Funktionen derselben 3ten Variablen, z.B. von x, sind.

Wenn wir hier erhalten sofort bei dem Differenzierungsprozess (sieh Anfang hiervon aus Heft I, wiederholt p. 10 dieses Heftes *)

$$\frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx},$$

so nicht zu vergessen, dass u und z hier beide *von x abhängige Variable*, wie y nur abhängig von x, weil von z und u. Bei *einer* abhängigen Variablen hatten wir diese auf der symbolischen Seite, wir haben jetzt auf der rechten Seite zwei Variablen u und z, die unabhängig gegenüber y, aber beide *abhängig von x* sind, und ihr Charakter [als] von x abhängiger Variablen erscheint in ihren respektiven symbolischen Koeffizienten $\frac{du}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$. Treten abhängige Variablen auch auf die rechte Seite, so müssen daher notwendig auch symbolische Differentialkoeffizienten innerhalb derselben auftreten.

Aus der Gleichung

$$\frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx}$$

folgt:

$$d(uz) \text{ oder } dy=z\,du+u\,dz.$$

Diese Gleichung zeigt aber nur die Operationen an, die vorzunehmen, sobald u und z als bestimmte Funktionen von x gegeben sind.

* Sieh S. 77. — *Red.*

Der einfachste Fall wäre z.B.

$$u = ax, \qquad z = bx.$$

Dann

$$d(uz) \text{ oder } dy = bx \cdot a\,dx + ax \cdot b\,dx.$$

Dividieren wir beide Seiten durch dx, so:

$$\frac{dy}{dx} = abx + bax = 2abx$$

und

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ab + ba = 2ab.$$

Nehmen wir aber von vornherein das Produkt

$$y \text{ oder } uz = ax \cdot bx = abx^2,$$

so

$$uz \text{ oder } y = abx^2, \quad \frac{dy}{dx} = 2abx, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2ab.$$[1]

Sobald wir Formel erhalten wie z.B. $[w =]\ z\frac{du}{dx}$, ist klar, dass die Gleichung, what we might call allgemeiner Operationsgleichung, symbolischer Ausdruck zu verrichtender Differentialoperationen [ist]. Nehmen wir z.B. [den] Ausdruck $y\frac{dx}{dy}$, wo y Ordinate, x Abszisse, so ist dies der allgemeine symbolische Ausdruck für die Subtangente jeder beliebigen Kurve (ganz wie $d(uz) = z\,du + u\,dz$ solches für Differentiation jedes Produkts zweier Variablen, die von derselben dritten abhängen). Solange wir aber den Ausdruck lassen wie er ist, führt er zu weiter nichts, obgleich wir für dx die sinnliche Vorstellung haben, dass es Differential der Abszisse, und für dy, dass es Differential der Ordinate.

Um irgendein positives Resultat zu erhalten, müssen wir erst die Gleichung einer bestimmten Kurve nehmen, die uns einen bestimmten Wert von y in x und daher auch für dx gibt, wie z.B. $y^2 = ax$, die Gleichung der gewöhnlichen Parabel, und dann durch Differentiation erhalten $2y\,dy = a\,dx$; hence $dx = \frac{2y\,dy}{a}$. Setzen wir diesen bestimmten Wert für dx in die allgemeine Formel der Subtangente $y\frac{dx}{dy}$, so erhalten

$$\frac{y\frac{2y\,dy}{a}}{dy} = \frac{y \cdot 2y\,dy}{a\,dy} = \frac{2y^2}{a},$$

und da $y^2 = ax$ [so ist dies]

$$= \frac{2ax}{a} = 2x,$$

welches der Wert der *Subtangente* der gewöhnlichen Parabel; i.e. sie *ist* $= 2 \times$ *Abszisse.* Aber wenn wir die Subtangente τ nennen, so liefert die allgemeine Gleichung $y \frac{dx}{dy} = \tau$, nur $y\,dx = \tau\,dy$. Vom Standpunkt der Differentialcalculs aus daher die Frage meist so gestellt (mit Ausnahme von Lagrange): den Realwert für $\frac{dy}{dx}$ zu finden.

Die Schwierigkeit scheint hervorzutreten, wenn wir für $\frac{dy}{dx}$ etc. ihre Originalform $\frac{0}{0}$ setzen dann

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

erscheint als

$$\frac{0}{0} = z \cdot \frac{0}{0} + u \cdot \frac{0}{0},$$

Gleichung, die richtig ist, aber zu nichts führt, und um so weniger, da die drei $\frac{0}{0}$ aus verschiednen Differentialkoeffizients entspringen, von deren verschiednen Ableitungen nichts mehr sichtbar ist; aber zu erwägen:

1) Selbst in der ersten Darstellung mit einer unabhängigen Variablen erhalten erst

$$\frac{0}{0} \text{ oder } \frac{dy}{dx} = f'(x); \quad \text{also} \quad dy = f'(x)\,dx.$$

Aber da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}, \quad dy = 0 \quad \text{und} \quad dx = 0, \quad \text{also} \quad 0 = 0.$$

Indem wir wieder für $\frac{dy}{dx}$ seinen unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ setzen, begehn wir hier jedoch einen positiven Fehler, denn $\frac{0}{0}$ hier nur gefunden als symbolisches Äquivalent des realen Werts $f'(x)$, und als solches ist es festgehalten im Ausdruck $\frac{dy}{dx}$, also auch in $dy = f'(x)\,dx$.

2) $\frac{u_1-u}{x_1-x}$ wird $\frac{du}{dx}$ oder $\frac{0}{0}$, weil die Variable $x_1=x$ wird oder $x_1-x=0$; wir erhalten also sofort nicht 0, sondern $\frac{0}{0}$ für $\frac{u_1-u}{x_1-x}$; wir wissen aber im allgemeinen, dass $\frac{0}{0}$ jeden Wert haben kann, und dass es im bestimmten Fall den Spezialwert hat, der sich ergibt, sobald für u eine bestimmte Funktion von x tritt; wir sind also nicht nur berechtigt $\frac{du}{dx}$ für $\frac{0}{0}$ zu setzen, sondern müssen es tun, da $\frac{du}{dx}$ ebenso wie $\frac{dz}{dx}$ hier nur als Symbole für vorzunehmende Differentialoperationen figurieren. Solange wir [aber] bei dem Resultat

$$\frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx},$$

also

$$dy=z\,du+u\,dz,$$

stehenbleiben, bleiben auch $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, du, dz unbestimmte Werte, so gut wie das jeden Werts fähige $\frac{0}{0}$.

3) In der gewöhnlichen Algebra selbst kann $\frac{0}{0}$ als Form erscheinen für Ausdrücke, die einen Realwert haben, eben weil $\frac{0}{0}$ Symbol jeder Grösse sein kann. Sei z.B. gegeben $\frac{x^2-a^2}{x-a}$, setzen wir $x=a$, so $x-a=0$ und $x^2=a^2$, daher $x^2-a^2=0$. Wir erhalten also

$$\frac{x^2-a^2}{x-a}=\frac{0}{0};$$

das Resultat soweit richtig; es beweist aber keineswegs, da $\frac{0}{0}$ jeden Wert haben kann, dass $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ keinen reellen Wert hat.

Zerlegen wir x^2-a^2 in seine Faktoren, so selbes $=(x+a)(x-a)$; also

$$\frac{x^2-a^2}{x-a}=(x+a)\cdot\frac{x-a}{x-a}=x+a;$$

als wenn $\boldsymbol{x-a=0}$, so $x=a$, daher $x+a=a+a=\boldsymbol{2a}$.

Hätten wir in einer gewöhnlichen algebraischen Gleichung das Glied $P(x-a)$, so wenn $x=a$, also $x-a=0$, notwendig $P(x-a)=P\cdot 0=0$; ebenso, unter denselben Voraussetzungen, $P(x^2-a^2)=0$. Die Zersetzung von x^2-a^2 in seine Faktoren $(x+a)(x-a)$ würde nichts daran ändern, denn

$$P(x+a)(x-a)=P(x+a)\cdot 0=0.$$

Daher folgt aber keineswegs, dass wenn vermittelst Gleichsetzung von $x=a$, das Glied $P\cdot\left(\frac{0}{0}\right)$ sich entwickelt hätte, sein Wert notwendigerweise $=0$.

$\frac{0}{0}$ kann jeden Wert haben, weil $\frac{0}{0}=X$ stets $0=X\cdot 0=0$ liefert; aber weil $\frac{0}{0}$ jeden Wert haben kann, hat es eben nicht notwendig den Wert 0, und wenn wir seine Herkunft kennen, ist, sobald sich ein realer Wert dahinter versteckt, dieser auch auffindbar.

So zum Beispiel $P\cdot\frac{x^2-a^2}{x-a}$, wenn $x=a$, $x-a=0$, also auch $x^2=a^2$, $x^2-a^2=0$; daher

$$P\cdot\frac{x^2-a^2}{x-a}=P\cdot\frac{0}{0}.$$

Obgleich wir mathematisch ganz richtig dies Resultat erhalten, so wäre es aber nicht minder mathematisch falsch ohne weiteres anzunehmen, dass $P\cdot\frac{0}{0}=0$, weil diese Voraussetzung einschlösse, dass $\frac{0}{0}$ notwendig keinen andern Wert als 0 haben kann und daher

$$P\cdot\frac{0}{0}=P\cdot 0.$$

Vielmehr wäre zu untersuchen, ob sich kein anderes Resultat ergibt durch Zersetzung von x^2-a^2 in seine Faktoren $(x+a)(x-a)$; dies verwandelt in der Tat den Ausdruck in

$$P\cdot(x+a)\cdot\frac{x-a}{x-a}=P\cdot(x+a)\cdot 1,$$

und [wenn] $x=a$ in $P\cdot 2a$ oder in $2Pa$. Sobald wir also mit Variablen rechnen, ist es um so mehr nicht nur berechtigt, sondern geboten, die

Herkunft von $\frac{0}{0}$ durch die Differentialsymbole $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ etc. festzuhalten, nachdem wir ursprünglich bewiesen haben, dass sie entspringen als symbolisches Äquivalent der abgeleiteten Funktionen von Variablen,
2 die bestimmte Differentiationsprozesse [zu] durchlaufen haben. Sind sie so ursprünglich das Resultat solcher Differentiationsprozesse, so können sie eben darum *umgekehrt* [zu] Symbolen mit den Variablen erst vorzunehmender Prozesse werden, also [zu] *Operationssymbolen*, die statt als Resultate, als Ausgangspunkte figurieren, und dies ist ihr wesentlicher Dienst im Differentialcalcul. Als solche Operationssymbole können sie selbst zum Inhalt der Gleichungen zwischen den verschiednen Variablen werden (bei implizierten Funktionen steht von vornherein auf der rechten Seite [der Gleichung] 0 und die abhängige wie unabhängige Variablen mit ihren Koeffizienten auf der linken).

So in der Gleichung, die wir erhalten:

$$\frac{d(uz)}{dx} \text{ oder } \frac{dy}{dx} = \frac{z\,du}{dx} + \frac{u\,dz}{dx}.$$

Von dem früher Gesagten abgesehen, erscheinen hier die von x abhängigen Funktionen z und u selbst unverändert als z und u wieder; aber jede derselben ausgestattet mit dem symbolischen Differentialkoeffizienten der andern als Faktor.

Die Gleichung hat also nur den Wert einer allgemeinen Gleichung, die durch Symbole anzeigt, welche Operationen vorzunehmen, sobald u und z respektiv, als abhängige Variable, zwei bestimmte Funktionen von x, gegeben sind.

Nur sobald [wir] bestimmte Funktionen von [x] haben für u und z, kann $\frac{du}{dx}\left(=\frac{0}{0}\right)$ und $\frac{dz}{dx}\left(=\frac{0}{0}\right)$ und daher auch $\frac{dy}{dx}\left(=\frac{0}{0}\right)$ zu 0 werden, also der Wert von $\frac{0}{0}=0$ kann nicht präsumiert werden, sondern müsste sich aus den bestimmten Funktionsgleichungen selbst ergeben.

Wäre z. B. $u = x^3 + ax^2$, so

$$\left(\frac{0}{0}\right) = \frac{du}{dx} = 3x^2 + 2ax, \qquad \left(\frac{0}{0}\right)_2 = \frac{d^3u}{dx^3} = 6,$$

$$\left(\frac{0}{0}\right)_1 = \frac{d^2u}{dx^2} = 6x + 2a, \qquad \left(\frac{0}{0}\right)_3 = \frac{d^4u}{dx^4} = 0,$$

also $\frac{0}{0}$ in diesem Fall $=0$.

Das Kurze und Lange von der Geschichte ist, dass wir hier vermittelst der Differentiation selbst die *Differentialkoeffizienten in ihrer symbolischen Form als Resultat* erhalten, als Werte [des Symbols $\frac{dy}{dx}$ in] der Differentialgleichung, nämlich in der Gleichung

$$\frac{d(uz)}{dx} \text{ oder } \frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}.$$

Nun wissen wir aber, dass $u =$ einer bestimmten Funktion von x, z. B. $f(x)$. Daher $\frac{u_1 - u}{x_1 - x}$, in seinem Differentialsymbol $\frac{du}{dx}$ ist gleich $f'(x)$, erster abgeleiteten Funktion von $f(x)$. Ebenso $z = \varphi(x)$ z. B., und so ebenfalls $\frac{dz}{dx} = \varphi'(x)$, ditto — von $\varphi(x)$. Nun liefert uns aber die Originalgleichung selbst weder u noch z in irgendeiner bestimmten Funktion von x, wie wäre z. B.

$$u = x^m,\ z = \sqrt{x}.$$

Sie liefert uns nur u und z als allgemeine Ausdrücke für jede 2 beliebige Funktionen von x, deren Produkt zu differenzieren ist.

Die Gleichung besagt, dass, wenn ein Produkt irgend zweier Funktionen von x, vorgestellt durch uz, zu differenzieren ist, erst für den symbolischen Differentialkoeffizienten $\frac{du}{dx}$ der entsprechende Realwert zu finden, d. h. die erste abgeleitete Funktion say of $f(x)$, und dieser Wert zu multiplizieren mit $\varphi(x) = z$; dann der Realwert von $\frac{dz}{dx}$ ebenso zu finden und zu multiplizieren mit $f(x) = u$; endlich die zwei so erhaltnen Produkte zu addieren. Die Operationen des Differentialcalculs sind hier bereits als bekannt unterstellt.

Die Gleichung ist also nur eine symbolische Andeutung von vorzunehmenden Operationen, und die symbolischen Differentialkoeffizienten $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ werden hier zugleich zu Symbolen, der in jedem konkreten Fall erst zu vollziehenden Differentialoperationen, während sie ursprünglich selbst abgeleitet wurden als symbolische Formeln bereits vollzogner Differentialoperationen.

Sobald sie diesen Charakter angenommen, können sie selbst zum Inhalt der Differentialgleichungen werden, wie z. B. im *Taylorschen Theorem:*[2]

$$y_1 = y + \frac{dy}{dx}h + \text{etc.}$$

Dies sind dann aber auch nur allgemeine, symbolische Operationsgleichungen. Das Interessante an diesem Falle der Differentiation von uz ist daher, dass es der einfachste, worin sich im Unterschied zu der Entwicklung der Fälle, wo die unabhängige Variable x bloss eine abhängige Variable y hat, durch Anwendung der ursprünglichen Methode selbst die Differentialsymbole auch auf der rechten Seite der Gleichung (ihrem Entwicklungsausdrucks) [sich] einstellen, daher zugleich als Operationssymbole auftreten und als solche zum Inhalt der Gleichung selbst werden.

Diese Rolle, worin sie zu verrichtende Operationen anzeigen und daher als Ausgangspunkt dienen, ist ihre eigentliche Rolle im bereits auf eignem Boden sich bewegenden Differentialcalcul, aber es ist sicher, dass dieser Umschlag, diese Umkehrung der Rollen, von keinem Mathematiker berücksichtigt und noch weniger durch eine ganz elementare Differentialgleichung als notwendig nachgewiesen worden. Es wird nur als Tatsache erwähnt, dass während die Entdecker des Differentialcalculus und das Gros ihrer Nachfolger die Differentialsymbole zum Ausgangspunkt des Calculs machen, Lagrange umgekehrt die algebraische Ableitung der wirklichen Funktionen der unabhängigen Variablen zum Ausgangspunkt macht und die Differentialsymbole zu bloss symbolischen Ausdrücken der bereits abgeleiteten Funktionen macht.

Kehren wir noch einmal zu $d(uz)$ zurück, so haben wir zunächst als Produkt der Setzung von $x_1 - x = 0$, als Produkt der Differentialoperation selbst erhalten:

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}.$$

Da die Nenner hier dieselben, so erhalten wir als reduzierten Ausdruck

$$dy = z\,du + u\,dz.$$

Dies entspricht dem, dass im Fall bloss einer abhängigen Variablen wir erhielten als symbolischen Ausdruck der abgeleiteten Funktion von x, der $f'(x)$ (z. B. von max^{m-1}, was $f'(x)$, wenn $ax^m = f(x)$), auf der linken Seite $\frac{dy}{dx}$ als ihren symbolischen Ausdruck

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

und erst als Resultat hiervon

$$dy = f'(x)\,dx$$

$\left(\text{z. B. } \frac{dy}{dx} = max^{m-1};\ dy = max^{m-1}\,dx,\right.$ welches das Differential of function $\left.y\right)$ $\left(\text{letzteres können wir gleich wieder umwandeln in } \frac{dy}{dx} = \right.$ $\left.= max^{m-1}\right)$. Aber der Fall

$$dy = z\,du + u\,dz$$

unterscheidet sich wieder dadurch, dass die Differentialen du, dz hier auf der rechten Seite als Operationssymbole stehn, und dass erst nach Verrichtung der Operationen, die sie anzeigen, dy bestimmt ist. Wenn

$$u = f(x) \quad \text{und} \quad z = \varphi(x),$$

so wissen wir, dass wir für du erhalten

$$du = f'(x)\,dx$$

und für [dz]

$$dz = \varphi'(x)\,dx.$$

Also:

$$dy = \varphi(x)\,f'(x)\,dx + f(x)\,\varphi'(x)\,dx$$

und

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\,f'(x) + f(x)\,\varphi'(x).$$

Im ersten Fall also erst der Differentialkoeffizient

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

gefunden und dann das Differential

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Im zweiten erst das Differential dy und dann der Differentialkoeffizient $\frac{dy}{dx}$. Im ersten Fall, wo die Differentialsymbole selbst erst aus den mit der $f(x)$ vorgehenden Operationen entspringen, muss erst die abgeleitete Funktion, der wirkliche Differentialkoeffizient gefunden sein, damit ihm als sein symbolischer Ausdruck $\frac{dy}{dx}$ gegenübertrete, und erst nachdem er gefunden, kann davon abgeleitet werden das Differential $dy = f'(x)\,dx$.

Umgekehrt in $dy = z\,du + u\,dz$.

Da du, dz hier als Operationssymbole figurieren und zwar Operationen andeuten, deren Ausführung wir bereits aus dem Differentialcalcul kenne so, um den Realwert von $\frac{dy}{dx}$ zu finden, müssen wir erst in jedem konkreten Fall für u seinen Wert in x und für z ditto seinen Wert in x setzen, um zu finden

$$dy = \varphi(x) f'(x)\, dx + f(x) \varphi'(x)\, dx;$$

dann ergibt erst die Division durch dx den Realwert von

3 $$\frac{dy}{dx} = \varphi(x) f'(x) + f(x) \varphi'(x).$$

Was für $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc., gilt für alle komplizierteren Formeln, wo die *Differentialsymbole* selbst als Inhalt allgemeiner symbolischer Operationsgleichungen erscheinen.

Anmerkungen des Herausgebers

1 Hier wird nochmals an einem Beispiel die Transitivität der Differentialoperationen gezeigt. Vgl. Kommentar zu *II*, 7 und *II*, 10.

2 Der Taylorsche Satz ist ein Beispiel für ein Ableitungsschema, in welchem beliebigfache Ableitbarkeit der gegebenen Funktion vorausgesetzt werden muß.

IV

ZWEITER ENTWURF

[I]

. . . .

Wir gingen von der algebraischen Ableitung von $f'(x)$ aus, um dadurch zugleich ihren symbolischen Differentialausdruck $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx}$ in seinem Ursprung nachzuveisen, und so auch dessen Sinn zu entdecken. Wir müssen jetzt umgekehrt, von den symbolischen Differentialkoeffizienten $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ als gegebnen Formeln ausgehn, um die ihnen respektiv entsprechenden realen Äquivalente $f'(x)$, $\varphi'(x)$ zu finden. Und zwar sind diese verschiednen Behandlungsweisen des Differentialcalculs, die von entgegengesetzten Polen ausgehn — und zwei verschiedne historische Schulen charakterisieren —, hier nicht entsprungen aus Änderung unserer subjektiven Methode, sondern aus der Natur der zu behandelnden Funktion uz. Wir behandelten sie, wie die Funktionen x mit nur einer abhängigen Variablen, indem wir vom Pol auf der rechten Seite ausgingen und mit dieser algebraisch operierten. Ich glaube nicht, dass irgendein Mathematiker, sei es an einer so elementaren Funktion wie uz, sei es an irgendeiner andern, diesen notwendigen Umschlag aus der ersten Methode der algebraischen Ableitung (historisch die zweite) nachgewiesen oder vielmehr wahrgenommen hat. Dazu waren sie zu sehr mit in der Materie des Calculus absorbiert.

In der Tat finden wir, dass in der Gleichung

$$\frac{0}{0} \text{ oder } \frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

$\frac{dy}{dx}$ ganz ebenso wieder entsprungen aus der Ableitung, die rechts mit uz vorging, wie vorher bei Funktionen x mit einer abhängigen

Variablen; aber anderseits die Differentialsymbole $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ dem $f'(x)$ oder der ersten aus uz Abgeleiteten selbst wieder einverleibt, und bilden daher Elemente des Äquivalents von $\frac{dy}{dx}$.

Die symbolischen Differentialkoeffizienten sind so selbst ihrerseits bereits zum *Gegenstand* oder *Inhalt* der Differentialoperation geworden, statt wie vorher nur als symbolisches Resultat derselben zu figurieren.

Mit diesen beiden Punkten, *erstens*, dass symbolische Differentialkoeffizienten gleich den Variablen ihrerseits selbst wieder zum inhaltlichen Element der Ableitung werden, zu *Gegenständen* von Differentialoperationen, *zweitens*, dass die Fragestellung sich umdreht, indem statt des symbolischen Ausdrucks für die realen Differentialkoeffizienten ($f'(x)$), der reale Differentialkoeffizient für seinen symbolischen Ausdruck zu finden,— mit diesen beiden Punkten ist der dritte gegeben, dass statt als symbolisches Resultat der mit der wirklichen Funktion x vorgegangnen Differentiationsoperationen zu erscheinen, umgekehrt die symbolischen Differentialausdrücke nun die Rolle von Symbolen spielen, die mit der wirklichen Funktion x erst zu verrichtende Differentiationsoperationen anzeigen; dass sie also zu *Operationssymbolen* werden.

In unserem Fall, wo

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx},$$

könnten wir nur weiter operieren, wenn wir nicht nur wüssten, dass z und u beide Funktionen von x sind, sondern wenn, wie

$$y = x^m,$$

für u und z wirkliche Werte in x gegeben wären, wie z. B.

$$u = \sqrt{x}, \qquad z = x^3 + 2ax^2.$$

Und so stehn in der Tat $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ als Anzeiger von Operationen, deren Ausführungsweise für jede beliebige Funktion von x, die an die Stelle von u und z gesetzt werden, als bekannt vorausgesetzt ist.

c) Die gefundne Gleichung ist nicht nur symbolische Operationsgleichung, sondern bloß vorbereitende symbolische Operationsgleichung.

Da in

[I)] $$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

der Nenner dx sich in allen Gliedern auf beiden Seiten befindet, so ist ihr reduzierter Ausdruck:

II) dy oder $d(uz) = z\,du + u\,dz$.

Unmittelbar besagt diese Gleichung, dass, wenn ein Produkt zweier beliebiger Variablen (und in weiterer Anwendung dies verallgemeinbar für Produkt jeder beliebiger Anzahl von Variablen) zu differenzieren ist, jeder der beiden Faktoren mit dem Differential des andern Faktors zu multiplizieren und die so erhaltnen zwei Produkte zu addieren sind.

Die erste Operationsgleichung

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

wird also, wenn das Produkt zweier beliebiger Variablen zu differenzieren war, als vorbereitende Gleichung überflüssig, nachdem sie ihren Dienst geleistet, nämlich den eine allgemeine symbolische Operationsformel zu liefern, die direkt zum Ziel führt.

Und hier ist zu bemerken, dass das Verfahren der ursprünglichen algebraischen Ableitung wieder in sein Gegenteil umgeschlagen ist. Wir erhielten dort erst

$$\Delta y = y_1 - y$$

als entsprechendes Symbol für $f(x_1) - f(x)$, beides $[f(x_1)$ und $f(x)]$ gewöhnliche algebraische Ausdrücke (da $f(x)$ wie $f(x_1)$ als bestimmte algebraische Funktionen von x gegeben waren). Dann stellte sich $\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ dar in $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, darauf $f'(x)$ (die erste abgeleitete Funktion von $f(x)$) in $\frac{dy}{dx}$, und erst aus der Schlussgleichung des Differentialkoeffizienten

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

erhielten wir **das Differential**

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Dagegen liefert uns die obige Gleichung [die] Differentiale dy, dz, du als Ausgangspunkte. So werden nämlich für u und z beliebige bestimmte, algebraische Funktionen von x gesetzt werden, die wir nur andeuten in

$$u = f(x) \quad \text{und} \quad z = \varphi(x),$$

so wird

$$dy = \varphi(x)\,df(x) + f(x)\,d\varphi(x),$$

und diese „d“-Zeichen zeigen nur zu verrichtende Differentiation an.

Das Resultat dieser Differentiation hat die allgemeine Form:

$$df(x) = f'(x)\,dx$$

und

$$d\varphi(x) = \varphi'(x)\,dx.$$

Also

$$dy = \varphi(x)\,f'(x)\,dx + f(x)\,\varphi'(x)\,dx.$$

Endlich

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\,f'(x) + f(x)\,\varphi'(x).$$

Hier, wo das Differential schon die Rolle eines fertigen Operationssymbols spielt, leiten wir also die Differentialkoeffizienten aus ihm ab, während in der ursprünglichen algebraischen Entwicklung umgekehrt das Differential aus der Gleichung der Differentialkoeffizienten hergeleitet ward.

Nehmen wir das *Differential* selbst, wie wir es in seiner einfachsten Form entwickelt, nämlich aus der Funktion vom ersten Grad:

$$y = ax, \qquad \frac{dy}{dx} = a;$$

daher das Differential

$$dy = a\,dx.$$

Die Gleichung dieser Differentiale scheint viel bedenklicher als die der Differentialkoeffizienten

$$\frac{0}{0} \text{ oder } \frac{dy}{dx} = a,$$

woraus sie abgeleitet.

Da $dy = 0$ und $dx = 0$, so $dy = a\,dx$ identisch mit $0 = 0$. Und dennoch sind wir vollständig berechtigt dy und dx für die verschwundenen, aber durch diese Symbole im Verschwinden fixierten Differenzen $y_1 - y$, $x_1 - x$ zu gebrauchen.

Solange wir bei dem Ausdruck

$$dy = a\,dx$$

oder allgemein

$$dy = f'(x)\,dx$$

stehnbleiben, ist er durchaus nichts, als eine andre Darstellung der Tatsache, dass

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

im obigen Fall $= a$ ist, worin wir ihn daher beständig wieder verwandeln können. Aber schon diese Umwandelbarkeit macht ihn zu einem Operationssymbol. Wir sehn sofort, dass wenn wir als Resultat von Differentiationsprozessen gefunden $dy = f'(x)\,dx$, wir beide Seiten nur durch dx zu dividieren haben, um $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, d. h. die Differentialkoeffiziente, zu finden.

So z. B. in $y^2 = ax$

$$d(y^2) = d(ax), \qquad 2y\,dy = a\,dx.$$

Letzte Gleichung von Differentialen liefert uns zwei Gleichungen von Differentialkoeffizienten, nämlich:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y} \quad \text{und} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a}.$$

$2y\,dy = a\,dx$ liefert uns aber auch *unmittelbar* für dx den Wert $\frac{2y\,dy}{a}$, der z. B. in die allgemeine Formel der Subtangenten $y\frac{dx}{dy}$ gesetzt, und schliesslich $2x$, die doppelte Abszisse, als Wert der Subtangente der gewöhnlichen Parabel herstellen hilft.

II

Wir wollen jetzt ein Beispiel nehmen, wo zuerst die symbolischen Ausdrücke als fertige Operationsformeln des Calculs dienen, daher auch für den symbolischen Differentialkoeffizienten sein Realwert gefunden wird, dann aber die umgekehrte elementare algebraische Darstellung folgen lassen.

1) Die abhängige Funktion y und die unabhängige Variable x seien nicht verbunden in einer einzigen Gleichung, sondern so, dass y in einer ersten Gleichung direkt als Funktion der Variablen u figuriert, u aber in einer zweiten Gleichung direkt als Funktion der Variablen x. Aufgabe: *zu finden den Realwert des symbolischen Differentialkoeffizienten* $\frac{dy}{dx}$.

Sei

a) $y = f(u)$, b) $u = \varphi(x)$.

Zunächst 1) $y = f(u)$ gibt:

$$\frac{dy}{du} = \frac{df(u)}{du} = \frac{f'(u)\,du}{du} = f'(u).$$

2) $\frac{du}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{\varphi'(x)\,dx}{dx} = \varphi'(x).$

Also

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x).$$

Aber

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

Also

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x).$$

Beispiel. Wenn a) $y = 3u^2$, b) $u = x^3 + ax^2$, so nach der Formel

$$\frac{dy}{du} = \frac{d(3u^2)}{du} = 6u \;\; (= f'(u))\,;$$

aber die Gleichung b) gibt $u = x^3 + ax^2$. Setzen wir diesen Wert von u in $6u$, so

$$\frac{dy}{du} = 6(x^3 + ax^2) \;\; (= f'(u)).$$

Ferner:

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 2ax \;\; (= \varphi'(x)).$$

Also

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ oder } \frac{dy}{dx} = 6(x^3 + ax^2)(3x^2 + 2ax) \;\; (= f'(u) \cdot \varphi'(x)).$$

2) Wir nehmen jetzt für Ausgangsgleichungen die im letzten Beispiel enthaltnen Gleichungen, um sie jetzt in der ersten algebraischen Weise zu entwickeln.

a) $y = 3u^2$, b) $u = x^3 + ax^2$.

Da $y = 3u^2$, [so] $y_1 = 3u_1^2$, und

$$y_1 - y = 3(u_1^2 - u^2) = 3(u_1 - u)(u_1 + u).$$

Daher

$$\frac{y_1 - y}{u_1 - u} = 3(u_1 + u).$$

Wird nun $u_1 - u = 0$, also $u_1 = u$, so verwandelt sich $3(u_1 + u)$ in $3(u+u) = 6u$.

Setzen wir in u seinen Wert aus Gleichung b), so

$$\frac{dy}{du} = 6(x^3 + ax^2).$$

Ferner: da

$$u = x^3 + ax^2, \quad [\text{so}] \quad u_1 = x_1^3 + ax_1^2;$$

also

$$u_1 - u = (x_1^3 + ax_1^2) - (x^3 + ax^2) = (x_1^3 - x^3) + a(x_1^2 - x^2),$$
$$u_1 - u = (x_1 - x)(x_1^2 + x_1 x + x^2) + a(x_1 - x)(x_1 + x);$$

also

$$\frac{u_1 - u}{x_1 - x} = (x_1^2 + x_1 x + x^2) + a(x_1 + x).$$

Wird **nun** $x_1 - x = 0$, also $x_1 = x$, so

$$x_1^2 + x_1 x + x^2 = 3x^2$$

und

$$a(x_1 + x) = 2ax.$$

Also:

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 2ax.$$

Multiplizieren wir nun die beiden Funktionen der rechten Seite, so erhalten wir

$$6(x^3 + ax^2)(3x^2 + 2ax),$$

und dem entspricht auf der linken Seite

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx},$$

also wie vorher.

Um den Unterschied der Entwicklung klarer hervortreten zu lassen, werden wir die bestimmten Funktionen der Variablen auf die linke Seite und die von ihr abhängigen Funktionen auf die rechte Seite stellen, da man von den allgemeinen Gleichungen her, wo auf der rechten nur 0 steht, gewohnt ist, die Initiative sich auf der linken Seite zu denken. Also:

a) $3u^2 = y$; b) $x^3 + ax^2 = u$.

Da

$$3u^2 = y, \quad 3u_1^2 = y_1,$$

also

$$3(u_1^2 - u^2) = y_1 - y$$

oder

$$3(u_1 - u)(u_1 + u) = y_1 - y,$$

also

$$3(u_1 + u) = \frac{y_1 - y}{u_1 - u}.$$

Wird nun $u_1 = u$, also $u_1 - u = 0$, so erhalten [wir]

$$3(u + u) \text{ oder } 6u = \frac{dy}{du}.$$

Setzen wir in $6u$ seinen Wert aus Gleichung b), so

$$6(x^3 + ax^2) = \frac{dy}{du}.$$

Ferner, wenn

$$x^3 + ax^2 = u,$$

so

$$x_1^3 + ax_1^2 = u_1$$

und

$$x_1^3 + ax_1^2 - x^3 - ax^2 = u_1 - u;$$

also

$$(x_1^3 - x^3) + a(x_1^2 - x^2) = u_1 - u.$$

Lösen wir weiter in Faktoren auf:

$$(x_1 - x)(x_1^2 + x_1x + x^2) + a(x_1 - x)(x_1 + x) = u_1 - u.$$

Daher

$$(x_1^2 + x_1x + x^2) + a(x_1 + x) = \frac{u_1 - u}{x_1 - x};$$

wird nun $x_1 = x$, also $x_1 - x = 0$, so

$$3x^2 + 2ax = \frac{du}{dx}.$$

Multiplizieren wir die 2 abgeleiteten Funktionen miteinander, so

$$6(x^3 + ax^2)(3x^2 + 2ax) = \frac{dy}{dx},$$

und wenn wir umstellen in die herkömmliche Ordnung:

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} = 6(x^3 + ax^2)(3x^2 + 2ax).$$

Es versteht sich von selbst, dass, infolge ihrer Weitläufigkeit und der oft schwierigen Zerlegung der ersten Differenz $f(x_1) - f(x)$ in Glieder, deren jedes $x_1 - x$ zum factor hat, die letzte Methode als Rechnungsinstrument nicht vergleichbar neben der historisch ältest hergebrachten.

Andrerseits aber geht man in letztrer von $dy, dx, \frac{dy}{dx}$ als gegebnen Operationsformeln aus, während man sie in ersterer, und zwar auf rein algebraischer Weise entspringen sieht. Und weiter behaupte ich nichts. Und wie wird dort in [historisch] ersterer der Ausgangspunkt für die Differentialsymbole als Operationsformeln gewonnen? Entweder durch verhüllte oder unverhüllte metaphysische Voraussetzungen, die selbst wieder zu metaphysischen, unmathematischen Konsequenzen führen, also da ist die gewaltsame Unterdrückung gewisser, der Ableitung im Wege stehender und doch aus ihr selbst hervorgegangner Grössen.

Um nun ein historisches Beispiel des Ausgangs von den 2 entgegengesetzten Polen zu geben, stelle ich zusammen die Lösung des oben entwickelten Kasus $d(uz)$ durch Newton und Leibnitz einerseits, durch Lagrange andrerseits.

1) *Newton.*

Erst wird uns gesagt, dass wenn die variablen Grössen wachsen, $\dot{x}, \dot{y}$ etc. die Geschwindigkeiten ihrer Fluxionen, alias des respektiven Wachstums von x, y etc. bezeichnen. Da ferner numerische Grössen aller möglichen Quantitäten durch grade Linien darstellbar, sind die *Momente* oder *unendlich kleinen Quanta*, die erzeugt werden, gleich dem *Produkt* der Geschwindigkeiten $\dot{x}$, $\dot{y}$ etc. und dem unendlich kleinen Zeitteil τ, worin sie verlaufen, also $= \dot{u}\tau$, $\dot{x}\tau$ und $\dot{y}\tau$.

V

DRITTER ENTWURF

Betrachten wir nun das Differential von y in seiner allgemeinen Form $dy = f'(x)\,dx$, so haben wir hier bereits eine rein symbolische Operationsgleichung vor uns, selbst im Fall, wo $f'(x)$ von vornherein eine Konstante ist, wie in $dy = d(ax) = a\,dx$. Dies Kind von $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ schaut verdächtiger aus als seine Mutter. Denn in $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ sind *Nenner und Zähler untrennbar verbunden*; in $dy = f'(x)\,dx$ sind sie augenscheinlich getrennt, so dass sich der Schluss aufdrängt: $dy = f'(x)\,dx$ ist nur ein maskierter Ausdruck für $0 = f'(x) \cdot 0$, also $0 = 0$, womit «nichts zu wolle». Feinere, unserm Jahrhundert angehörige Analytiker, wie z.B. der Franzos Boucharlat, riechen hier auch eine Ratte. Er sagt:

In «$\frac{dy}{dx} = 3x^2$ z.B. ist $\frac{0}{0}$ alias $\frac{dy}{dx}$, oder vielmehr sein Wert $3x^2$, der Differentialkoeffizient der function y. Da $\frac{dy}{dx}$ also das Symbol ist, welches die Grenze $3x^2$ repräsentiert, müsste dx stets unter dy stehn, aber, um *die algebraischen Operationen zu erleichtern*, behandeln wir $\frac{dy}{dx}$ als gewöhnlichen Bruch und $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ als gewöhnliche Gleichung und erhalten so durch Befreiung der Gleichung von ihrem Nenner dx das Resultat $dy = 3x^2\,dx$, welcher Ausdruck *das Differential von* y heisst»[43].

Um «die algebraischen Operationen zu erleichtern», führen wir also eine falsche Formel ein.

In der Tat verhält sich die Sache nicht so. In $\frac{0}{0}$ $\left(\text{eigentlich } \left(\frac{0}{0}\right) \text{ zu schreiben}\right)$ besitzt das Verhältnis des Minimalausdrucks von $y_1 - y$ oder von $f(x_1) - f(x)$ oder des Inkrements von $f(x)$ zum Minimalausdruck von $x_1 - x$ oder zum Inkrement der unabhängigen variablen Grösse x eine Form, worin der Zähler unzertrennbar vom Nenner. Aber warum? Um $\frac{0}{0}$ als *Verhältnis* verschwundner Differenzen zu behalten. Sobald aber $x_1 - x = 0$ in dx eine Form gewinnt, welche es als verschwundne Differenz von x manifestiert, und also auch $y_1 - y = 0$ als dy erscheint, wird die Trennung von Zähler und Nenner eine durchaus zulässige Operation. Wo dx jetzt auch stehe, sein Zusammenhang mit dy bleibt von solchem Ortswechsel unberührt. $dy = df(x)$, also $= f'(x)\,dx$, ist nur ein andrer Ausdruck für $\frac{dy}{dx}$ $[= f'(x)]$, das am Schluss herauskommen muss, damit $f'(x)$ selbständig [vom Faktor dx] erhalten werde. Wie nützlich diese Formel $dy = df(x)$ aber sofort als *Operationsformel* wird, zeigt z.B.:

$$y^2 = ax,$$

$$d(y^2) = d(ax), \qquad 2y\,dy = a\,dx;$$

also

$$dx = \frac{2y\,dy}{a}\,.$$

Dieser Wert von dx gesetzt in die allgemeine Formel der Subtangenten $y\frac{dx}{dy}$, gibt dann

$$\frac{y\frac{2y\,dy}{a}}{dy} = \frac{2y^2\,dy}{a\,dy} = \frac{2y^2}{a}\,,$$

und da

$$y^2 = ax, \quad [\text{so}] \quad = \frac{2ax}{a} = 2x;$$

so dass $2x$ die doppelte Abszisse der gewöhnlichen Parabel Wert ihrer Subtangente.

Gilt aber $dy = df(x)$ als erster Ausgangspunkt, woraus selbst $\frac{dy}{dx}$ erst später entwickelt wird, so, damit dies Differential von y irgendeinen Sinn habe, müssen die Differentiellen dy, dx als Symbole mit bestimmten Sinn *vorausgesetzt* sein. Wären solche Voraussetzungen nicht der mathematischen Metaphysik entstammt, sondern etwa unmittelbar abgeleitet worden aus einer Funktion vom ersten Grad, wie $y = ax$, so, wie früher gesehn, liefert dies $\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a$, welches sich verwandelt in $\frac{dy}{dx} = a$. Aber auch hieraus a priori nichts Bestimmtes zu holen.

Denn da $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ebensogut $= a$, wie $\frac{dy}{dx} = a$, und die Δx, Δy, zwar endliche Differenzen oder Inkremente sind, aber endliche Differenzen oder Inkremente von unlimitierter Kontraktionsfähigkeit, so kann man dx, dy ebensowohl als unendlich kleine, sich 0 beliebig annäherbare Grössen vorstellen, wie entspringend aus wirklicher Gleichsetzung von $x_1 - x = 0$, also auch $y_1 - y = 0$. Das Resultat auf der rechten Seite bleibt beidemal identisch, während in ihr selbst ist durchaus kein $x_1 = x$ zu setzen, also auch kein $x_1 - x = 0$. Dies Setzen $= 0$ auf der andren Seite erschiene daher als ebenso willkürliche Hypothese, wie die Annahme von dx, dy als unendlich kleine Grössen. Ich werde sub IV) an dem Beispiel $d(uz)$ kurz den historischen Gang zeigen, vorher aber noch sub III) ein Beispiel geben, welches das erstemal auf dem Boden des symbolischen Calculs mit einer fertigen Operationsformel behandelt, das zweite Mal algebraisch dargestellt wird. Soviel hat sich sub II) gezeigt, dass die letztre Methode selbst, durch ihre Anwendung auf eine so elementare Funktion wie das Produkt zweier Variablen, vermittelst ihrer eignen Resultate, notwendig zu der vom Gegenpol aus operierenden Methode die Ausgangspunkte liefert.

Ad IV.

Schliesslich (*nach Lagrange* noch zu bemerken, dass die *Grenze* oder der *Grenzwert*, der sich schon gelegentlich für den Differentialkoeffizienten bei Newton findet, den er noch aus rein geometrischen Vorstellungen abgeleitet, noch heutzutage stets eine hervorragende Rolle spielt, sei es nun, dass die symbolischen Ausdrücke als Grenze von $f'(x)$ oder umgekehrt $f'(x)$ als Grenze des Symbols figurieren oder alle zwei als Grenzen figurieren. Diese Kategorie, die namentlich Lacroix analytisch breitgetreten, wird als Ersatz für die Kategorie «Minimalausdruck», sei es der Abgeleiteten im Gegensatz zu der «vorläufig Abgeleiteten», sei es des Verhältnisses $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$, nur wichtig, sobald es sich um Anwendung des Calculus auf Kurven handelt. Sie ist geometrisch *vorstellbarer* und findet sich daher auch schon *bei den alten Geometern*. Bei manchen Modernen versteckt sich dieser noch immer dahinter, dass die Differentiellen und Differentialkoeffizienten bloß sehr Annäherungswerte ausdrücken.

VI

EINIGE NACHTRÄGE

A) Nachträgliches über Differentiation von uz.

1) Bei der Entwicklung von $d(uz)$ im letzten **Manuskript war für** mich mit Bezug auf Gleichung

$$\text{A)}\quad \frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

das Wesentliche der Nachweis, dass die hier angewandte algebraische Methode von selbst in die Differentialmethode umschlägt, indem sie innerhalb der Abgeleiteten, also auf der rechten Seite, *symbolische Differentialkoeffizienten* ohne entsprechende Äquivalente reale Koeffizienten entwickelt, womit diese Symbole als solche zu *selbständigen Ausgangspunkten* und fertiggelieferten *Operationsformeln* werden.

Die Form der Gleichung A) bot sich zu diesem Zweck um so passender als sie eine Vergleichung erlaubt zwischen den innerhalb der Abgeleiteten $f'(x)$ produzierten $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ mit dem auf der linken Seite gegenüberstehenden $\frac{dy}{dx}$, welches der symbolische Differentialkoeffizient von $f'(x)$ ist, daher sein symbolisches Äquivalent bildet.

Betreffs des Charakters von $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ als Operationsformeln begnügte ich mich mit dem Wink, dass für jene symbolischen Differentialkoeffizienten beliebige «Abgeleitete» als deren Realwerte findbar, wenn man für u irgendein $f(x)$, z.B. $3x^2$, für z irgendein $\varphi(x)$, z.B. $x^3 + ax^2$ setzt.

Ich hätte aber auch die geometrische Anwendbarkeit jener Operationsformeln andeuten können, indem z.B. *die allgemeine Formel der*

Subtangenten der Kurven $= y\frac{dx}{dy}$, welches mit $z\frac{du}{dx}$, $u\frac{dz}{dx}$ soweit ganz identischer Form [ist], als sie alle Produkte einer Variablen mit einem symbolischen Differentialkoeffizienten [sind].

Schliesslich hätte noch bemerkt werden können, dass $y = uz$, die *einfachste elementarische Funktion* (y hier $= y^1$ und uz die einfachste Form zweiter Potenz) [ist], an welcher unser Thema entwickelbar.

A) Differentiation von $\frac{u}{z}$.

3) Da $d\frac{u}{z}$ der umgekehrte Fall von $d(uz)$, hier Multiplikation, dort Division, so liegt es nahe, die *algebraisch* gefundne Operationsformel

$$d(uz) = z\,du + u\,dz$$

direkt zu benutzen, um $d\frac{u}{z}$ zu finden. Ich werde dies nun tun, damit der Unterschied zwischen Ableitungsmethode und blosser Anwendung eines früher gefundnen Differentiationsresultats, das nun seinerseits als Operationsformel dient, klar hervorsteche.

$$\text{a)}\quad y = \frac{u}{z};$$

$$\text{b)}\quad u = yz.$$

Da $y = \frac{u}{z}$, so

$$yz = \frac{u}{z}\cdot z = u.$$

Wir haben also bloß formell u in ein Produkt von 2 Faktoren maskiert. Und dennoch ist hiermit in der Tat schon die Aufgabe gelöst, denn aus Differentiation eines Bruchs hat sich das Problem verwandelt in die Differentiation eines Produkts, wozu wir die Zauberformel in der Tasche haben. Gemäss dieser Formel:

$$\text{c)}\quad du = z\,dy + y\,dz.$$

Wir sehen sofort dem ersten Glied der zweiten Seite, nämlich $z\,dy$, an, dass es auf seinem Posten bis genau vor Torschluss in *Ruhstand sitzen* bleiben muss, denn die Aufgabe besteht grade darin, das Differential von $y\left(= \frac{u}{z}\right)$ zu finden, also seinen Ausdruck in Differentiellen von

u und z. Aus diesem Grund ist andrerseits $y\,dz$ auf die linke Seite zu *versetzen*. Daher:

$$\text{d)}\quad du - y\,dz = z\,dy.$$

Setzen wir nun in $y\,dz$ den Wert von y, nämlich $\frac{u}{z}$, so

$$du - \frac{u}{z}\,dz = z\,dy;$$

daher

$$\frac{z\,du - u\,dz}{z} = z\,dy.$$

Jetzt der Moment gekommen, dy von seinem sleeping partner z zu befreien, und wir erhalten

$$\frac{z\,du - u\,dz}{z^2} = dy = d\,\frac{u}{z}.$$

EIN IN DAS HEFT «B (FORTSETZUNG VON A) II.» HINEINGELEGTES BLATT

1) *Newton*, geb. 1642, † 1727. «*Philosophiae naturalis* **principia** *mathematica*», pub. 1687.

L. I. *Lemma* XI, *Schol.* Lib. II.

L. II. *Lemma* II, *nach Proposition* VII.

«*Analysis per quantitatum series, fluxiones etc.*», composed **1665**, publ. 1711.

2) *Leibniz.*

3) *Taylor* (J. Brook), geb. 1685, † 1731, publiziert 1715—17: «*Methodus incrementorum etc.*».

4) *Mac Laurin* (*Colin*), geb. 1698, † 1746.

5) *John Landen.*

6) *D'Alembert*, geb. 1717, † 1783. «*Traité des fluides*», 1744.

7) *Euler* (Léonard), [geb.] 1707, † 1783. «*Introduction à l'analyse de l'infini*», Lausanne, 1748. «*Institutions du calcul différentiel*», 1755 (p. I, c. III).

8) *Lagrange*, geb. 1736. «*Théorie des fonctions analytiques*» (1797 und 1813) (*sieh Introduction*).

9) *Poisson* (Denis, Siméon), geb. 1781, † 1840.

10) *Laplace* (P. Simon, marquis de), geb. 1749, † 1827.

11) *Moigno's*, «*Leçons de Calcul Différentiel et de calcul intégral*».

VII

I. ERSTE ENTWÜRFE

Newton: geb. 1642, †1727 (85 Jahre alt). «*Philosophiae naturalis principia mathematica*» (zuerst published 1687, cf. *Lemma* I und *Lemma* XI, *Schol.*).

Dann namentlich: «*Analysis per quantitatum series, fluxiones etc.*», erst published 1711, aber composed 1665, während Leibniz erst 1676 dieselbe Entdeckung gemacht.

Leibniz: geb. 1646, †1716 (70 Jahre alt).

Lagrange: geb. 1736, †erst unter Kaisertum (Napoleon I), ist Erfinder der *Méthode des variations*. «*Théorie des fonctions analytiques*» (1797 und 1813).

D'Alembert: geb. 1717, †1783 (66 Jahre alt). «*Traité des fluides*», 1744.

1) *Newton*. The velocities or fluxions, z. B. der *Variablen* x, y etc. *bezeichnet durch* $\dot{x}$, $\dot{y}$ etc. Z.B. wenn u und x *connected quantities* (*fluents*) *generated by continuous movement*, $\dot{u}$ und $\dot{x}$ bezeichnen die Raten of their increase, und daher $\frac{\dot{u}}{\dot{x}}$ das *Verhältnis* zwischen den rates, worin ihre increments generated.

Da die numerischen Grössen aller möglichen Quantitäten durch grade Linien darstellbar, die *Moments* oder unendlich kleinen portions der quantities generated = den Products ihrer velocities und des unendlich kleinen Zeitteils, worin diese Geschwindigkeiten dauern, so dass τ denoting diesen unendlich kleinen Zeitteil, the moments of x und y represented durch $\tau\dot{x}$ und $\tau\dot{y}$ respectively.

Z. B. $y = uz$; $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{u}$ denoting the velocities, womit y, z, u respectively increasing, then the *moments* von y, z, u sind $\tau\dot{y}$, $\tau\dot{z}$, $\tau\dot{u}$, und wir erhalten:

$$y = uz, \quad y + \tau\dot{y} = (u + \tau\dot{u})(z + \tau\dot{z}) = uz + u\tau\dot{z} + z\tau\dot{u} + \tau^2\dot{u}\dot{z};$$

hence

$$\tau\dot{y} = u\tau\dot{z} + z\tau\dot{u} + \tau^2\ddot{uz}.$$

Da τ unendlich klein, verschwindet es von selbst, und noch mehr $\tau^2\ddot{uz}$ altogether als Produkt, was nicht im unendlich kleinen Zeitraum τ, sondern in dessen 2ter Potenz entspringt. $\left(\text{Wäre } \tau = \frac{1}{\text{millionster}},\right.$ so $\left.\tau^2 = \frac{1}{1\,\text{mill.} \times 1\,\text{mill.}}.\right)$

Also erhalten

$$\dot{y} = \dot{u}z + z\dot{u},$$

oder die Fluxion von $y = uz$ ist $\dot{u}z + z\dot{u}$.

2) *Leibniz.* Sei zu finden das Differential von uz.

u wird $u + du$, z wird $z + dz$; also

$$uz + d\,(uz) = (u + du)\,(z + dz) = uz + u\,dz + z\,du + du\,dz.$$

Zieht man hiervon die gegebne Quantität uz ab, so bleibt als Zuwachs $u\,dz + z\,du + du\,dz$; $du\,dz$, Produkt d'un infiniment petit du par un autre infiniment petit dz, ist ein unendlich kleines zweiter Ordnung und verschwindet vor den unendlich kleinen $u\,dz$ und $z\,du$ von erster Ordnung, daher

$$d\,(uz) = u\,dz + z\,du.$$

[3)] *D'Alembert.* Stellt im allgemeinen die Aufgabe so. Wenn

$$y = f\,(x),$$

$$y_1 = f\,(x + h);$$

zu bestimmen, was der Wert von $\frac{y_1 - y}{h}$ wird, wenn die Grösse h verschwindet, also was der Wert von $\frac{0}{0}$ wird.

Newton und Leibniz, wie die meisten ihrer Nachfolger, bewegen sich von vornherein auf dem Boden des Differentialcalculs, und die Differentialausdrücke gelten daher von vornherein als Operationsformeln, um dann reales Äquivalent zu finden. Der ganze Witz kommt darauf hinaus. Wird die unabhängige Variable x zu x_1, so wird die abhängige Variable zu y_1. $x_1 - x$ aber notwendig gleich irgendeiner Differenz, $=$ z. B. h. Dies liegt im Begriff der Variablen selbst. Aber daraus folgt keineswegs, dass diese Differenz, $= dx$, [eine] verschwindende ist, also in der Tat $= 0$.

Sie kann auch endliche Differenz darstellen. Haben wir aber von vornherein gesetzt, dass x, wenn es wächst, wird zu $x + \dot{x}$ (das τ bei Newton tut keinen Dienst in seiner Analysis der Grundfunktionen, kann also unterdrückt werden, oder mit Leibniz dass x zu $x + dx$ wird, so werden Differentialausdrücke sofort Operationssymbole, ohne dass ihr algebraischer Ursprung hervortritt.

Ad 15 * (*Newton*).

Nehmen wir Newtons Ausgangsgleichung für das Produkt uz, das zu differenzieren, so:

$$y = uz,$$

$$y + \tau\dot{y} = (u + \dot{u}\tau)(z + \dot{z}\tau).$$

Schmeissen wir das τ hinaus, wie er das gefälligst selbst tut, nachdem er die erste Differentialgleichung entwickelt, so erhalten wir:

$$y + \dot{y} = (u + \dot{u})(z + \dot{z}),$$

$$y + \dot{y} = uz + \dot{u}z + \dot{z}u + \dot{z}\dot{u},$$

$$y + \dot{y} - uz = \dot{u}z + \dot{z}u + \dot{u}\dot{z}.$$

Also da $uz = y$,

$$\dot{y} = \dot{u}z + \dot{z}u + \dot{u}\dot{z}.$$

Und um das richtige Resultat zu erhalten, muss $\dot{u}\dot{z}$ unterdrückt werden.

Woher entsteht nun das gewaltsam zu unterdrückende Glied $\dot{u}\dot{z}$?

Ganz einfach daher, dass die Differentiale von y als $\dot{y}$, von u als $\dot{u}$ und z als $\dot{z}$ von vornherein durch eine Definition als von den variablen Grössen, aus denen sie entstehn, getrennte, selbständige Existenzen eingeführt werden, ohne auf irgendeinem mathematischen Weg abgeleitet zu sein.

Man sieht einerseits, welchen Nutzen diese präsumierte Existenz von dy, dx oder $\dot{y}$, $\dot{x}$ hat, indem ich von vornherein, sobald die Variablen wachsen, ich in die algebraische Funktion nur die Binome $y + \dot{y}$, $x + \dot{x}$ etc. zu setzen habe und mit diesen selbst dann als gewöhnliche algebraische Grössen manövrieren kann.

Ich erhalte z. B., wenn ich $y = ax$ habe:

$$y + \dot{y} = ax + a\dot{x};$$

also

$$y - ax + \dot{y} = a\dot{x};$$

---

* Sieh S. **85**, **86**

hence

$$\dot{y} = a\dot{x}.$$

Ich habe damit sofort das Resultat erhalten: das Differential der abhängigen Variablen ist gleich dem Zuwachs von ax, nämlich $a\dot{x}$, ist gleich dem aus ax *abgeleiteten Realwert* a (dass dies hier konstante Grösse, ist zufällig und ändert an der Allgemeinheit des Resultats nichts, da es nur dem Umstand geschuldet, dass die Variable x sich hier in der ersten Potenz befindet) [mal $\dot{x}$]. Verallgemeinere ich dies Resultat, so weiss ich [dass] $y = f(x)$, denn dies heisst, dass y die von x abhängige Variable ist. Nenne ich die von $f(x)$ abgeleitete Grösse, i. e. das reale Element des Zuwachses, $f'(x)$, so das allgemeine Resultat:

$$\dot{y} = f'(x)\dot{x}.$$

Ich weiss also von vornherein, dass das Äquivalent des Differentials der abhängigen Variablen y gleich der ersten abgeleiteten Funktion der unabhängigen ist, multipliziert mit ihrem Differential, d. h. dx oder $\dot{x}$.

Also allgemein ausgedrückt, wenn

$$y = f(x),$$

so

$$dy = f'(x)\,dx$$

oder $\dot{y}$ = realem Koeffizient in x (ausser wo Konstante tritt, weil x in erster Potenz) mal $\dot{x}$.[1]

Aber $\dot{y} = a\dot{x}$ gibt mir sofort $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = a$ und im allgemeinen:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f'(x).$$

Ich habe so für das Differential und den Differentialkoeffizienten zwei weiterentwickelte Operationsformeln gefunden, welche Basis des ganzen Differentialcalculs bilden.

Und ausserdem allgemein ausgedrückt erhalte ich durch die a priori vorausgesetzten dx, dy etc. oder $\dot{x}$, $\dot{y}$ etc. als selbständige isolierte Inkremente von x und y den enormen Vorteil, der den Differentialcalcul auszeichnet, dass alle Funktionen der Variablen von vornherein in Differentialformen sich darstellen.

Habe ich so die wesentlichen Funktionen der Variablen entwickelt auf diesem Weg, wie ax, $ax \pm b$, xy, $\frac{x}{y}$, x^n, a^x, $\log x$, ebenso die elementaren Zirkularfunktionen, so werden sie bei Findung von dy, $\frac{dy}{dx}$ ganz
1 so unterstellt, wie das Einmaleins in der Arithmetik.

Sehn wir uns aber jetzt die Kehrseite an, und wir finden sofort, dass die ganze ursprüngliche Operation mathematisch falsch ist.

Nehmen wir ein ganz einfaches Beispiel: $y = x^2$. Wächst x, so erhält es einen unbestimmten Zuwachs h, daher auch die von ihm abhängige Variable y einen unbestimmten Zuwachs k, und wir erhalten

$$y + k = (x + h)^2 = x^2 + 2hx + h^2,$$

Formel, die uns durch das Binom[ial Theorem] gegeben ist. Daher

$$y + k - x^2 \text{ oder } y + k - y = 2hx + h^2;$$

hence

$$(y + k) - y \text{ oder } k = 2hx + h^2;$$

dividieren wir beide Seiten durch h, so:

$$\frac{k}{h} = 2x + h.$$

Setzen wir nun $h = 0$, so wird

$$2x + h = 2x + 0 = 2x.$$

Andrerseits aber wird $\frac{k}{h}$ zu $\frac{k}{0}$; da aber y nur zu $y + k$ wurde, weil x zu $x + h$, so wird $y + k$ wieder zu y, wenn h zu 0, daher $x + h$ wieder zu $x + 0$, zu x wird. Also wird k auch zu 0 und $\frac{k}{0} = \frac{0}{0}$, welches ausgedrückt werden kann $\frac{dy}{dx}$ oder $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Wir erhalten so:

$$\frac{0}{0} \text{ oder } \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x.$$

Wenn wir dagegen in

$$y + k - x^2 = 2hx + h^2 \quad \text{oder} \quad (y + k) - y = 2xh + h^2$$

[$h = 0$ setzen] (h wird nur zum Symbol dx, nachdem es vorher in seiner ursprünglichen Form gleich 0 gesetzt), so erhalten wir $k = 0 + 0 = 0$, und das einzige Resultat, was wir gewonnen, ist die Einsicht in unsre Voraussetzung, dass y bloss zu $y + k$ wird, wenn x zu $x + h, \ldots$ also wenn $x + h = x + 0 = x$, so $y + k = y$, oder $k = 0$.

Wir erhalten aber keineswegs, wie Newton das macht:

$$k = 2x\,dx + dx\,dx$$

oder in Newtonscher Schreibart:

$$\dot{y} = 2x\dot{x} + \dot{x}\dot{x};$$

h wird erst zu $\dot{x}$, und daher k zu $\dot{y}$, sobald h die Höllenfahrt durch 0 passiert hat, d. h. nachdem die Differenzen $x_1 - x$ (oder $(x + h) - x$) und daher auch die von $y_1 - y$ $(= (y + k) - y)$ auf ihren absoluten Minimalausdruck $x - x = 0$ und $y - y = 0$ reduziert worden sind.

Indem Newton aber sofort die Zuwächse der Variablen x, y etc. [die Differentialen] nicht durch mathematische Ableitung bestimmt, sondern sofort zu Differentialen $\dot{x}$, $\dot{y}$ etc. stempelt, können sie nicht $= 0$ sein; denn sonst wäre das Resultat 0, da algebraisch ausgedrückt das von vornherein Setzen dieser Zuwächse $= 0$, darauf hinauskommt, wie oben in Gleichung

$$(y + k) - y = 2xh + h^2,$$

h sofort gleich 0 zu setzen, daher $k = 0$, und folglich in letzter Instanz $0 = 0$ zu erhalten. Die Nullifikation von h darf nicht vorgehn, bevor die erste abgeleitete Funktion x, hier $2x$, von dem Faktor h durch Division befreit ist, also

$$\frac{y_1 - y}{h} = 2x + h$$

erhalten ist. Erst dann kann die endliche Differenz aufgehoben werden. Der Differentialkoeffizient

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

muss daher auch ursprünglich vorher entwickelt werden, bevor wir das Differential

$$dy = 2x\,dx$$

erhalten können.

Es bleibt also nichts übrig, als sich die Zuwächse der Variablen h als unendlich kleine Zuwächse vorzustellen und ihnen als solche *selbständige Existenz* zu geben, z. B. in den Symbolen $\dot{x}$, $\dot{y}$ etc. oder dx, dy [etc.]. Aber unendlich kleine Grössen sind Grössen wie unendlich grosse (das Wort unendlich [klein] meint in der Tat nur unbestimmt klein), die dy, dx etc. oder $\dot{y}$, $\dot{x}$ [etc.] figurieren in der Rechnung daher auch wie gewöhnliche algebraische Grössen und in der obigen Gleichung

$$(y+k)-y \text{ oder } k = 2x\,dx + dx\,dx$$

das $dx\;dx$ hat dasselbe Existenzrecht wie $2x dx$: das sonderbarste aber ist das Raisonnement, wodurch es gewaltsam unterdrückt wird, nämlich grade dadurch, dass die Relativität des Begriffs unendlich klein benutzt wird. $dxdx$ wird unterdrückt, weil es unendlich klein verglichen mit dx, also auch mit $2xdx$ ist oder mit $2x\dot{x}$...

Oder, wenn in

$$\dot{y} = \dot{u}z + \dot{z}u + \dot{u}\dot{z}$$

das $\dot{u}\dot{z}$ unterdrückt wird wegen seiner unendlichen Kleinheit verglichen mit $\dot{u}z$ oder $\dot{z}u$, so könnte man sich mathematisch nur damit helfen, dass $\dot{u}z + \dot{z}u$ nur ein Annäherungswert, so annähernd gedacht wie man will, ist. Derartiges Manöver kommt auch in der gewöhnlichen Algebra vor. Aber dann tritt das noch grössere Wunder ein, dass man durch diese Methode keineswegs annähernde, sondern exakt genaue Werte (sei es wie oben auch nur symbolisch richtige) für die abgeleitete Funktion [in] x erhält, wie in dem Beispiel

$$\dot{y} = 2x\dot{x} + \dot{x}\dot{x}.$$

Unterdrückt man hier $\dot{x}\dot{x}$ so erhält man:

$$\dot{y} = 2x\dot{x}$$

und

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x,$$

was die richtig abgeleitete erste Funktion von x^2 ist, wie schon das Binom[ial Theorem] beweist.

Aber das Wunder ist kein Wunder. Es wäre nur ein Wunder, wenn *kein exaktes Resultat* durch die gewaltsame Unterdrückung von $\dot{x}\dot{x}$ herauskäme. Man *unterdrückt nämlich nur einen Rechnungsfehler*, der jedoch eine unvermeidliche Konsequenz einer Methode ist, welche den unbestimmten Zuwachs, z. B. h, der Variablen sofort als Differential dx oder $\dot{x}$, als fertiges Operationssymbol, einführt und [sich] damit auch von vornherein im Differentialcalcul eine eigentümliche, von der
2 gewöhnlichen Algebra verschiedne Rechnungsweise erwir[k]t.

Allgemein [lässt sich] der Gang der von uns angewandten algebraischen Methode so ausdrücken.

Wenn gegeben $f(x)$, so zuerst entwickelt die «vorläufig Abgeleitete», die wir $f^1(x)$ nennen wollen:

$$1) \qquad f^1(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta x} = f^1(x).$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\Delta y = f^1(x)\,\Delta x.$$

Also auch

$$\Delta f(x) = f^1(x)\,\Delta x$$

(da $y = f(x)$, [so] $\Delta y = \Delta f(x)$).

Durch das Setzen von $x_1 - x = 0$, also **auch** $y_1 - y = 0$, **wird** erhalten

$$[2)] \qquad \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Dann

$$dy = f'(x)\,dx;$$

also auch

$$df(x) = f'(x)\,dx$$

(da $y = f(x)$, [so] $dy = df(x)$).

Wenn we have once developed

$$1) \quad \Delta f(x) = f^1(x)\,\Delta x,$$

so

$$2) \quad df(x) = f'(x)\,dx$$

only the differential expression of 1).

[———————]

1) Wenn wir haben, x werdend zu x_1, so

$$\text{A)} \quad x_1 - x = \Delta x;$$

woraus folgende conclusions zu ziehn:

$$\text{Aa)} \quad \Delta x = x_1 - x; \qquad \text{a)} \quad x_1 - \Delta x = x;$$

Δx, die *Differenz* zwischen x_1 und x, ist also positiv ausgedrückt, das *Inkrement* von x; denn wenn es wieder abgezogen wird von x_1, kehrt dies zu seinem ursprünglichen Zustand zurück, zu x.

Die Differenz kann also doppelt ausgedrückt werden: *unmittelbar als Differenz* zwischen der angewachsenen Variablen und ihrem Zustand vor dem Wachstum, und dies ist ihr *negativer Ausdruck*; positiv als Inkrement *, *als Resultat*: *als Inkrement* des x in dem Zustand, wo es noch nicht gewachsen, und dies ist der positive Ausdruck.

Wir werden sehn, wie in der Geschichte des Differentialcalculus die doppelte Fassung Rolle spielt.

[2)] b) $x_1 = x + \Delta x.$

x_1 ist das angewachsene x selbst, sein Wachstum ist nicht von ihm getrennt; x_1 ist die ganz unbestimmte Form seines Wachstums; diese Form unterscheidet das angewachsene x, nämlich x_1, von seiner Originalform vor dem Wachstum, von x, aber sie unterscheidet nicht x von seinem Inkrement selbst. Das Verhältnis zwischen x_1 und x kann daher nur **negativ** ausgedrückt werden, als *Differenz*, als $x_1 - x$. Dagegen in

$$x_1 = x + \Delta x$$

ist:

1) Die Differenz *positiv* als Inkrement von x ausgedrückt.

2) Sein Wachstum ist daher nicht ausgedrückt als *Differenz*, sondern als *Summe* seiner selbst in seinem Originalzustand + seines Inkrements.

3) Technisch ausgedrückt wird x aus seinem Monom zu einem Binom, und überall, wo in der Originalfunktion x in irgendeinem Grad vorkommt, tritt für das angewachsne x ein Binom, das aus *ihm selbst und seinem Inkrement* besteht, allgemein für x^m das Binom $(x + h)^m$. Die Entwicklung des Wachstums von x wird so in der Tat einfache Anwendung des *binomischen Theorems*. Da x als erstes und Δx als zweites Glied dieses Binoms auftritt — was gegeben durch deren Verhältnis selbst, weil x [da] sein muss vor Erzeugung seines Inkrements Δx—, werden in der Tat durch das Binom nur die Funktionen von x abgeleitet, während Δx als Faktor in aufsteigenden Potenzen neben ihm figuriert, und zwar muss Δx in der ersten Potenz, also Δx^1 Faktor des zweiten Glieds der Entwicklungsreihe, d.h. der mit den binomischen Lehrsatz abgeleiteten ersten Funktion von x_1 [sein]. Dies zeigt sich gleich, wenn x in der zweiten Potenz gegeben. Aus x^2 wird $(x + \Delta x)^2$, was nichts ist als *Multiplikation* von $x + \Delta x$ durch sich selbst, [und was] liefert $x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$, d.h. das erste Glied muss die Originalfunktion von x sein; und die erste abgeleitete Funktion von x^2, nämlich hier $[2]x$, bildet das zweite Glied mit dem Faktor Δx^1, der im ersten Glied nur als Faktor $\Delta x^0 = 1$ auftritt. Die Abgeleitete wird also gefunden nicht

* Von Marx mit Bleistift hinzugefügt: «oder Dekrement».[2] – *Red.*

durch Differentiation, sondern durch Anwendung des binomischen Lehrsatzes, also *Multiplikation*, und zwar, weil das angewachsne x_1 von vornherein selbst als Binom, als $x + \Delta x$ figuriert.

4) Obgleich in $x + \Delta x$ Δx ebenso unbestimmt ist, was ihre Grösse angeht, als die unbestimmte Variable x selbst, ist Δx bestimmt als von x unterschiedne, separate Grösse, als Frucht neben ihrer Mutter, bevor diese geschwangert war.

$x + \Delta x$ drückt nicht nur unbestimmt aus, dass x als Variable gewachsen, sondern sie drückt [auch] aus, *um was* x gewachsen, nämlich um Δx.

5) x erscheint nie als x_1; die ganze Entwicklung dreht sich um das Inkrement Δx, sobald die Abgeleitete durch die Anwendung des binomischen Lehrsatzes, also durch $x + \Delta x$ gesetzt in bestimmtem Grad von x, gefunden ist. Nur auf der linken Seite, wenn in $\frac{y_1 - y}{\Delta x}$, das

$$\Delta x = 0$$

wird, erscheint es schliesslich als $= x_1 - x$ wieder, so dass

$$\frac{y_1 - y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}\text{*}.$$

Die positive Seite, die in $x_1 - x = 0$ liegt, nämlich das Werden von $x_1 = x$, kann also nie in die Entwicklung eintreten, da x_1 als solches nie in der Seite der Entwicklungsreihe auftritt; das eigentliche Geheimnis des Differentialcalculus tritt so nie hervor.

6) Wenn $y = f(x)$ und $y_1 = f(x + \Delta x)$, so können wir sagen, dass in dieser Methode die *Entwicklung von y_1 die Aufgabe löst der Findung*
3 *der Abgeleiteten.*

c) $x + \Delta x = x_1$ (also auch $y + \Delta y = y_1$). Δx kann hier nur erscheinen in der Form $\Delta x = x_1 - x$, also in der *negativen* Form der *Differenz* zwischen x_1 und x, nicht in der *positiven* als Inkrement von x wie in $x_1 = x + \Delta x$.

1) Hier unterscheidet sich das gewachsne x als x_1 *von sich selbst*, bevor es wuchs, nämlich von x, aber x_1 erscheint nicht als ein um Δx gewachsnes x; x_1 bleibt daher wirklich ganz so unbestimmt wie x es ist.

2) Ferner: wie x eingeht in die eine Originalfunktion, so x_1 als Gewachsnes in die durch das Wachstum veränderte Originalfunktion. Z. B. wenn x auftritt in der Funktion x^3, so x_1 in der Funktion x_1^3.

---

* Von Marx mit Bleistift hinzugefügt: «$\left(= \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$».— *Red.*

Während vorher durch Setzen von $(x + \Delta x)$ [dort], wo in der Originalfunktion x stand, die Abgeleitete durchs Binom fix und fertig geliefert wird, wenn auch behaftet mit Faktor Δx und als Vormann von andern Gliedern in x behaftet mit Δx^2 etc., so ist aus der unmittelbaren Form des Monoms x_1^3, des gewachsnen x, ebensowenig unmittelbar abzuleiten, als [es] aus x^3 war. Was aber damit gegeben ist, ist die *Differenz* $x_1^3 - x^3$. Wir wissen aus der Algebra, dass alle Differenzen der Form $x^3 - a^3$ durch $(x - a)$, also im gegebnen Fall durch $x_1 - x$, dividierbar sind. Indem wir also $x_1^3 - x^3$ durch $x_1 - x$ dividieren (statt [wie] vorher in der vom Grad der Funktion angegebnen Anzahl $(x + \Delta x)$ mit sich selbst zu multiplizieren), erhalten wir [vorläufig] einen Ausdruck von der Form $(x_1 - x)\,P$, wobei es nichts ändert, ob die ursprüngliche Funktion von x vielgliedrig (also x in verschiednen Potenzen enthält) oder wie in unsrem Beispiel eingliedrig. Dies $(x_1 - x)$ wird durch Division zum Nenner von $y_1 - y$ auf der linken Seite und so $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ dort hergestellt, das Verhältnis der Differenz der Funktion zur Differenz der unabhängigen Variablen x in seiner abstrakten Differenzform. Die Zerlegung der Differenz zwischen der in x_1 und der in x ausgedrückten Funktion in Glieder, die alle $x_1 - x$ zum Faktor haben, kann je nach der Beschaffenheit der Originalfunktion von x mehr oder weniger algebraische Manöver erfordern, sich also nicht immer so light geben wie in $x_1^3 - x^3$. Dies ändert nichts an der
4 Methode.

Wo die Originalfunktion ihrer Natur nach keine direkte Zerlegung [der Differenz $f(x_1) - f(x)$] in $(x_1 - x)\,P$ zulässt, wie dies bei $f(x) = uz$ (zwei von x abhängigen Variablen) der Fall war, erscheint der [Ausdruck] $(x_1 - x)$ [im] Faktor $\frac{1}{x_1 - x}$. Ferner, wo nach der Entfernung von $x_1 - x$ auf der linken Seite durch Division beider Seiten damit, in P selbst noch $x_1 - x$ fortexistiert (wie z.B. in der Ableitung von $y = a^x$, wo wir finden

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a^x \left\{ (a-1) + \frac{(x_1 - x) - 1}{1 \cdot 2} \cdot (a-1)^2 + \text{etc.} \right\},$$

wo das Setzen von $x_1 - x = 0$ liefert

$$= a^x \left\{ (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \text{etc.} \right\} \Big),$$

kann dies immer nur, wie im eben zitierten Beispiel, so vorkommen, dass das Setzen von $x_1 - x = 0$ es verschwinden [liesse] und dann immer an seiner Stelle positive Resultate zurückliesse. In andern Worten, die in P zurückgebliebnen $x_1 - x$ können mit den übrigen

Elementen von P nicht als Faktoren verbunden sein (als Multiplikatoren). P wäre sonst auflösbar in $P = p\,(x_1 - x)$, also, da bereits $x_1 - x = 0$ gesetzt, in $p \cdot 0$; hence $P = 0$...

Die erste endliche Differenz $x_1^3 - x^3$, wenn $y = x^3$ und $y_1 = x_1^3$, ist also entwickelt worden zu

$$y_1 - y = (x_1 - x)\,P,$$

hence

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = P.$$

P, ein Ausdruck kombiniert in x_1 und x, ist $= f^1$, die Abgeleitete der ersten endlichen Differenz, woraus $x_1 - x$ ebenso eliminiert ist, wie höhergradiges $(x_1 - x)^2$ etc. Die x_1 und x können daher nur in positiven Ausdrücken kombiniert sein, wie $x_1 + x$, $x_1 x$, $\frac{x_1}{x}$, $\sqrt{x_1 x}$ etc. Wird daher jetzt $x_1 = x$ gesetzt, so werden diese Ausdrücke respektive $2x$, x^2, $\frac{x}{x}$ oder 1, $\sqrt{xx}$ oder x etc., und nur auf der linken Seite, wo $x_1 - x$ den Nenner bildet, entsteht 0, daher der symbolische Differentialkoef-
5 fizient etc.

Anmerkungen des Herausgebers

1 **Deutlicher wäre die Begründung aus der operativen Auffassung der Differentiation durch die Formel $dy = \frac{dy}{dx}\,dx$. Die klassische (Newton, Leibniz) Formulierung ist aber schon ihrem Selbstverständnis nach nicht rein operativ, vielmehr wird $\frac{dy}{dx}$ bzw. $f'(x)$ als Realwert, als schon bekannte Ableitung behandelt.**

2 **Marx bemerkt hier die Notwendigkeit, den Grenzprozeß beidseitig, also mit positivem und negativem Δx auszuführen. (Die Ableitung existiert nur, wenn sowohl**

$$\lim_{\substack{x_1 \to x \\ x_1 < x}} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \lim_{x_1 < x} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{als auch} \quad \lim_{\substack{x_1 \to x \\ x_1 > x}} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \lim_{x_1 > x} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

existieren und

$$\lim_{x_1 < x} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_1 > x} \frac{\Delta y}{\Delta x}\,)$$

VIII

II. DER HISTORISCHE ENTWICKLUNGSGANG

1) Mystischer Differentialcalculus. $x_1 = x + \Delta x$, von vornherein verwandelt in $x_1 = x + dx$ oder $x + \dot{x}$, wo dx supponiert durch metaphysische *Erklärung*. Erst existierts, und dann wirds erklärt.

Dann aber auch $y_1 = y + dy$ oder $y_1 = y + \dot{y}$. Aus der willkürlichen Voraussetzung entspringt die Konsequenz, dass in der Entwicklung des Binoms $x + \Delta x$ oder $x + \dot{x}$ die Glieder in x und Δx, die man z.B. neben der ersten Abgeleiteten erhielt, *wegeskamotiert* werden müssen, um das richtige Resultat zu erhalten etc. etc. Da vom letzten Resultat bei der wirklichen Grundlegung des Differentialcalculus ausgegangen wird, nämlich von den *Differentiellen*, die antizipiert, nicht abgeleitet sind, sondern durch Erklärung *vorausgesetzt*, so ist auch $\frac{dy}{dx}$ oder $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, der symbolische Differentialkoeffizient, durch diese Erklärung *antizipiert*.

Wenn der Zuwachs von $x = \Delta x$ und Zuwachs der von ihm abhängigen Variablen $= \Delta y$, so versteht sich von selbst, dass $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ das Verhältnis der Inkremente von x und y darstellt. Dass aber Δx im Nenner figuriert, i.e. der Zuwachs der unabhängigen Variablen im Nenner statt im Zähler, nicht umgekehrt, dies ergibt sich, indem das letzte Resultat der Entwicklung der Differentialformen selbst, nämlich *das Differential*, durch die vorausgesetzten Differentiellen auch von vornherein gegeben ist.

Nehme ich das allereinfachste Verhältnis der abhängigen Variablen y und der unabhängigen Variablen x, so ist $y = x$. So weiss ich, dass $dy = dx$ oder $\dot{y} = \dot{x}$. Da ich aber die Abgeleitete der unabhängigen [Variablen] x suche, die hier $= \dot{x}$, so habe ich beide Seiten durch $\dot{x}$

oder dx zu dividieren, also:

$$\frac{dy}{dx} \text{ oder } \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1.$$

Ich weiss also ein für allemal, dass im symbolischen Differentialkoeffizient das Inkrement [der unabhängigen Variablen] im Nenner und nicht im Zähler stehn muss.

Beginnend aber mit Funktionen von x im zweiten Grad wird die *Abgeleitete* sofort gefunden durch den binomischen Lehrsatz, [welcher eine Entwicklung gibt], wo sie vom zweiten Glied fix und fertig erscheint behaftet mit dx oder $\dot{x}$, d.h. den Inkrementen ersten Grades + den wegzueskamotierenden Gliedern. Die *Eskamotage* ist aber unbewussterweise mathematisch richtig, weil sie nur wegeskamotiert Rechnungsfehler, entsprungen aus den ursprünglichen Eskamotagen von vornherein.

$x_1 = x + \Delta x$ zu verwandeln in

$$x_1 = x + dx \text{ oder } x + \dot{x},$$

wobei sich dann mit diesem Differentialbinom wie mit gewöhnlichen Binomen wirtschaften lässt, was vom technischen Standpunkt sehr probat wird.

Die einzige Frage, die noch aufgeworfen werden könnte: warum die gewaltsame Unterdrückung der im Weg stehenden Glieder [stattfindet]? Das setzt nämlich voraus, dass man weiss, dass sie im Weg stehn und nicht wirklich zur Abgeleiteten gehören.

Antwort sehr einfach: dies fand man rein experimentell. Nicht nur von vielen höher entwickelten Funktionen von x, auch in ihrer analytischen Form als Gleichungen von Kurven etc. waren die wirklichen Abgeleiteten längst bekannt, sondern man entdeckte das gleich beim allererst möglichen entscheidenden Experiment, nämlich bei Behandlung der einfachsten algebraischen Funktionen zweiten Grades, z. B.:

$$y = x^2,$$
$$y + dy = (x + dx)^2 = x^2 + 2x\,dx + dx^2,$$
$$y + \dot{y} = (x + \dot{x})^2 = x^2 + 2x\dot{x} + \dot{x}^2.$$

Zieht man auf beiden Seiten die ursprüngliche **Funktion** x^2 ($y = x^2$) ab, so:

$$dy = 2x\,dx + dx^2,$$
$$\dot{y} = 2x\dot{x} + \dot{x}\dot{x};$$

unterdrücke ich die letzten Glieder auf beiden [**rechten**] Seiten, so:

$$dy = 2x\,dx, \quad \dot{y} = 2x\dot{x},$$

und weiter

$$\frac{dy}{dx} = 2x,$$

oder

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x.$$

Aber aus $(x + a)^2$ weiss man, dass x^2 das erste Glied; das zweite $2xa$; dividiere ich diesen Ausdruck durch a, wie oben $2x\,dx$ durch dx, oder $2x\dot{x}$ durch $\dot{x}$, so erhalten $2x$ als erste Abgeleitete von x^2, als Zuwachs in x, den das Binom zu x^2 zugefügt hat; also mussten die dx^2 oder $\dot{x}\dot{x}$ unterdrückt werden, um die Abgeleitete zu finden; ganz abgesehn davon, dass mit dx^2 oder $x\dot{x}$ an sich nichts anzufangen war.

Man kam also auf experimentellem Weg — gleich beim zweiten Schritt — notwendig zur Einsicht, dass dx^2 oder $\dot{x}\dot{x}$ wegzueskamotieren, um nicht nur das wahre, sondern überhaupt irgendein Resultat zu erhalten.

Zweitens aber hatte man in

$$2x\,dx + dx^2 \quad \text{oder} \quad 2x\dot{x} + \dot{x}\dot{x}$$

den wahren mathematischen Ausdruck (zweite und dritte Glieder) des Binoms $(x + dx)^2$ oder $(x + \dot{x})^2$ vor sich. Dass *dies mathematisch wahre Resultat auf der ebenso mathematisch grundfalschen Voraussetzung* beruhe, $x_1 - x = \Delta x$, sei von vornherein $x_1 - x = dx$ oder $\dot{x}$, wusste man nicht [1]. Man hätte sonst dasselbe Resultat statt durch Eskamotage durch eine algebraische Operation einfachsten Stils erhalten und der mathematischen Welt präsentiert.

Also: man glaubte selbst an den mysteriösen Charakter der neu entdeckten Rechnungsart, die wahre (und dabei namentlich auch in der geometrischen Anwendung überraschende) Resultate lieferte bei positiv falschem mathematischen Verfahren. Man war so selbst mystifiziert, schätzte den neuen Fund um so höher, machte die Schar der alten orthodoxen Mathematiker um so hirntoller und rief so das gegnerische Geschrei hervor, das selbst in der Laienwelt widerhallt und nötig ist, um den Neuen den Weg zu bahnen.

2) **Der rationelle Differentialcalculus.** D'Alembert starts directly from the *point de départ Newtons and Leibniz*: $x_1 = x + dx$. Aber er macht sofort die fundamentale Berichtigung: $x_1 = x + \Delta x$, d. h. x und ein *unbestimmtes*, aber prima facie *endliches Inkrement*, welches er h nennt. Die Verwandlung dieses h oder Δx in dx (bei ihm Leibnizsche Schreibart, wie bei allen Franzosen) findet sich erst als letztes Resultat

der Entwicklung oder wenigstens knapp vor Toresschluss, während es bei den Mystikern und Initiatoren des calculus als Ausgangspunkt erscheint (D'Alembert selbst geht von der symbolischen Seite aus, aber bevor sie in Symbol verwandelt). Dadurch wird sofort zweierlei erreicht.

a) Das Differenzen Verhältnis

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{x_1-x}$$

hat zum Ausgangspunkt seiner Bildung

1) [die Differenz] $f(x+h)-f(x)$, welche der in x gegebnen algebraischen Funktion entspricht, die entsteht, sobald man in die Originalfunktion in x, z.B. in x^3 statt x selbiges mit seinem Inkrement, $x+h$, setzt. Diese Form ($=y_1-y$, wenn $y=f(x)$) ist die der *Differenz der Funktionen*, welche zur Verwandlung ins Verhältnis des Inkrements der Funktion zum Inkrement der unabhängigen Variablen der Entwicklung bedarf, also eine reelle, nicht bloss nominelle Rolle spielt, wie bei den Mystikern; denn, wenn ich bei diesen habe

$$f(x)=x^3,$$
$$f(x+h)=(x+h)^3=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3,$$

so weiss ich von vornherein, dass in

$$f(x+h)-f(x)=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3,$$

[das], was sich gegenübertritt, auf die Inkremente reduziert ist. Dies braucht nicht einmal geschrieben werden, da ich auf der zweiten Seite sehe, dass das Inkrement von x^3 = den drei folgenden Gliedern, sowie in $f(x+h)-f(x)$ das Inkrement von $f(x)$ oder dy allein bleibt. Die erste Differenzgleichung spielt also nur eine von vornherein wieder verschwindende Rolle. Die Inkremente stehn sich von vornherein auf beiden Seiten gegenüber, und habe ich sie, so habe ich aus der Definition von dx, dy, dass $\frac{dy}{dx}$ oder $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ das Verhältnis etc. ist; ich brauche also die erste Differenz, gebildet durch die Subtraktion der Originalfunktion in x von der (vermittelst des Ersetzens von x durch $x+h$) veränderten Funktion (angewachsnen Funktion) nicht, um $\frac{dy}{dx}$ oder $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ zu bilden.

Bei D'Alembert ist es nötig, diese Differenz festzuhalten, weil Entwicklungsbewegungen an ihr zu vollziehn sind. Statt des positiven Ausdrucks der Differenz, nämlich des Inkrements, tritt daher der negative Ausdruck des Inkrements, nämlich die Differenz, also

$f(x+h) - f(x)$, auf der linken Seite in den Vordergrund. Und dies Betonen der Differenz statt des Inkrements (fluxion bei Newton) wenigstens vorgefühlt in der Leibnizschen Bezeichnung dy im Gegensatz zum Newtonschen $\dot{y}$.

2) $f(x+h) - f(x) = 3x^2h + 3xh^2 + h^3$.

Indem beide Seiten durch h dividiert werden, erhalten

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2.$$

Hierdurch gebildet auf der linken Seite

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{x_1 - x}$$ [2]

die (sich) so als ein *abgeleitetes Verhältnis endlicher Differenzen erscheint*, während sie bei den Mystikern ein fertiges Verhältnis der durch die Definitionen von dx oder $\dot{x}$ und dy oder $\dot{y}$ gegebnen Inkremente war.

3) Indem jetzt in

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{x_1 - x}$$

$h = 0$, oder $x_1 = x$, also $x_1 - x = 0$ gesetzt wird, verwandelt sich dieser Ausdruck in $\frac{dy}{dx}$, während durch dies Setzen von $h = 0$ die Glieder $3xh + h^2$ gleichzeitig alle geworden, und zwar durch eine richtige mathematische Operation[3]. Sie sind also jetzt ohne Eskamotage entfernt. Man erhält:

4) $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx} = 3x^2 = f'(x)$.

Diese existierte wie bei den Mystikern schon als gegeben, sobald x zu $x + h$ ward denn $(x+h)^3$ statt x^3 liefert $x^3 + 3x^2h +$ etc., wo $3x^2$ bereits im zweiten Glied der Reihe als *Koeffizient* von h in der ersten Potenz erscheint. Die Ableitung ist daher wesentlich [die]selbe, wie bei Leibniz und Newton, aber die fix und fertige Abgeleitete $3x^2$ wird auf strikt algebraische Weise von ihrem sonstigen Zusammenhang *losgewickelt*. Es ist keine *Entwicklung*, sondern eine *Loswicklung* des $f'(x)$, hier $3x^2$, von seinem Faktor h und den neben ihm in Reih und Glied aufmarschierten andern Gliedern. Was aber wirklich entwickelt worden, ist die linke, symbolische Seite, nämlich dx, dy und ihr Verhältnis, der symbolische Differentialkoeffizient $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ $\left(\text{rather umgekehrt } \frac{0}{0} = \frac{dy}{dx}\right)$, der seinerseits wieder einige metaphysische Schauder erregte, obgleich das Symbol mathematisch abgeleitet.

D'Alembert hatte dem Differentialcalculus das mystische Gewand abgestreift, einen enormen Fortschritt gemacht. Obgleich sein *«Traité des fluides»* 1744 erschien (sieh p. 15 *), herrschte die Leibnizsche Methode noch jahrelang vor in Frankreich. Dass Newton in England herrschte bis in die ersten Dezennien des 19. Jahrhunderts, kaum nötig zu bemerken. Aber hier, wie in Frankreich früher, [ist] D'Alembert's Grundlegung die herrschende geworden bis jetzt, mit einigen Modifikationen.

3) **Der rein algebraische Differentialcalculus.** Lagrange, *«Théorie des fonctions analytiques»* (1797 und 1813). Der erste Ausgangspunkt sonach sub 1) als 2) war das gewachsne x; wenn

$$y \text{ oder } f(x) = \text{etc.},$$

so y_1 oder $f(x + dx)$ in der mystischen Methode, y_1 oder $f(x + h)$ $(= f(x + \Delta x))$ in der rationellen. Dieser binomische Ausgangspunkt liefert sofort auf der andern Seite die binomische Entwicklung, z.B.:

$$x^m + mx^{m-1}h + \text{etc.},$$

wo schon das zweite Glied $mx^{m-1}h$ den gesuchten realen Differentialkoeffizienten mx^{m-1} fix und fertig liefert.

a) $f(x + h)$ auf der linken Seite verhält sich zu der ihr gegenübertretenden Entwicklungsreihe, sobald $x + h$ statt x in eine gegebne Originalfunktion von x gesetzt wird, genau so wie [sich] der *unentwickelte, allgemeine Ausdruck* in der Algebra und namentlich wieder das Binom zu der ihm entsprechenden *Entwicklungsreihe* verhält, z. B. wie in

$$(x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + \text{etc.}$$

$(x + h)^3$ [sich] zu der ihm äquivalenten Entwicklungsreihe $x^3 + 3x^2h + \text{etc.}$ verhält. Damit tritt $f(x + h)$ in dasselbe algebraische Verhältnis (nur auf variable Grössen angewandt), worin sich in der ganzen Algebra der allgemeine Ausdruck zu seiner Entwicklung verhält, z. B. in

$$\frac{a}{a-x} = 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \text{etc.},$$

$\frac{a}{a-x}$ zu der Entwicklungsreihe $1 + \text{etc.}$ oder in

$$\sin(x + h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

$\sin(x + h)$ zu der ihr gegenüberstehenden Entwicklung.

* Sich S. **105**.— *Red.*

D'Alembert hatte bloss $(x + dx)$ oder $(x + \dot{x})$ algebraisiert in $(x + h)$, also auch $f(x + h)$ aus $y + dy$, $y + \dot{y}$ in $f(x + h)$. Aber Lagrange reduziert den Gesamtausdruck auf einen rein algebraischen Charakter, indem er ihn als *allgemeinen unentwickelten Ausdruck*, der aus ihm abzuleitenden Entwicklungsreihe gegenüberstellt.

b) In der ersten Methode 1) wie in der rationellen 2) wird der gesuchte reale Koeffizient fix und fertig fabriziert durch das binomische Theorem und findet sich schon als zweites Glied der Entwicklungsreihe, daher in dem Glied [vor], das notwendig mit h^1 behaftet. Das ganze weitere Differentialverfahren, sei es wie in 1), sei es wie in 2), ist also Luxus. Werfen wir also den nutzlosen Ballast beiseit. Wir wissen ein für allemal aus der binomischen Entwicklung, dass der erste Realkoeffizient der Faktor von h ist, der zweite der von h^2 usw. Diese reellen Differentialkoeffizienten sind nichts als die der Reihe nach binomisch entwickelten *abgeleiteten Funktionen der Originalfunktion* in x (und die Einführung dieser Kategorie der *abgeleiteten Funktionen* eine der wichtigsten). Was die aparten differentiellen Formen betrifft, so wissen wir, dass Δx in dx sich umwandelt, Δy in dy, dass die erste Abgeleitete die symbolische Figur von $\frac{dy}{dx}$, die zweite Abgeleitete, der Koeffizient von $\frac{1}{2}h^2$, die symbolische Figur $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. erhält. Wir können also der Symmetrie halber unsere rein algebraisch erhaltnen Resultate gleichzeitig auch in diesen ihren symbolischen Differentialäquivalenten erscheinen lassen — Sache der Nomenklatur, die allein vom eigentlichen Differentialcalculus übrig bleibt. Die ganze wirkliche Aufgabe löst sich dann auf, Methoden zu finden (algebraische) «of developing all kinds of functions of $x + h$ in integral ascending powers of h, which in many cases cannot be effected without great prolixity of operation».

Bis hierher erscheint nichts bei Lagrange, als was durch direkten Ausgang von D'Alemberts Methode findbar (da dieser auch die ganze Entwicklung der Mystiker, nur berechtigt, einschliesst).

c) Indem also das development von y_1 oder $f(x + h) =$ etc. an die Stelle des bisherigen Differentialcalculus tritt ⟦und damit in der Tat das Geheimnis der von

$$y + dy \text{ oder } y + \dot{y},\ x + dx \text{ oder } x + \dot{x}$$

ausgehenden Methoden klar hervortritt, nämlich, dass ihre wirkliche Entwicklung auf Anwendung des binomischen Lehrsatzes beruht, indem sie von vornherein das angewachsne x_1 als $x + dx$, das angewachsne y_1 als $y + dy$ darstellen und so ein Monom in ein Binom verwandeln⟧, wird aber nun die Aufgabe [gestellt], da in $f(x + h)$ eine

Funktion von x ohne Grad vor uns, nur der *allgemeine unentwickelte Ausdruck* derselben, aus diesem unentwickelten Ausdruck selbst die allgemeine, also auch für was immer gradige Funktionen von x gültige, *Entwicklungsreihe* algebraisch abzuleiten.

Hier zur Algebraisierung des Differentialcalculus nimmt Lagrange als seinen unmittelbaren Ausgangspunkt das Theorem *des von den Newtonianern und von Newton überlebten Taylor*, welches in der Tat das allgemeinste, zusammenfassendste Theorem und zugleich Operationsformel des Differentialcalculus ist, nämlich die in symbolischen Differentialkoeffizienten ausgedrückte Entwicklungsreihe von y_1 oder $f(x+h)$, viz.:

$$y_1 \text{ oder } f(x+h) =$$

$$= y\,(\text{oder } f(x)) + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{[2]} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{[2\cdot3]} + \frac{d^4y}{dx^4}\frac{h^4}{[2\cdot3\cdot4]} + \text{etc.}$$

d) Hier hereinzusetzen Untersuchung über Mac Laurin's und Taylor's Theoreme.

e) Lagrange's algebraische Entwicklung von $f(x+h)$ in äquivalenter Reihe, welche Taylor's $\frac{dy}{dx}$ etc. ersetzt und sie nur noch als symbolische Differentialausdrücke für die algebraisch abgeleiteten Funktionen von x bestehn lässt. (Dies nachher weiter auszuführen.)

Anmerkungen des Herausgebers

1 Der schwerwiegendste Mangel des klassischen Differentialkalküls (Newton, Leibniz), aufgrund dessen er notwendigerweise irrational werden muß, ist die Nichtunterscheidung von Differenz (Δx) und Differential (dx). Ebenso ist ja der metaphysische Charakter der Wertform in ihrer genetischen Unvermitteltheit begründet, vgl. „Kapital I", S. 85ff.

2 Gemeint ist hier die Gleichung $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = F(x_1, x)$ bzw. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = F^0(x_1, x)$, wobei die linke Seite der Gleichung symbolisch, die rechte Seite real ist. Statt ein fertiges Verhältnis vorzufinden, wird das Differenzverhältnis in der expliziten Gestalt F^0 produziert.

3 Die Operation ist richtig, weil nur auf der symbolischen Seite der Gleichung der Nenner O wird.

IX

III. FORTSETZUNG VON ENTWÜRFEN

c) Fortsetzung von [p.] 25 *.

Wir haben $x_1 - x = \Delta x$ ursprünglich für den Ausdruck der *Differenz* $x_1 - x$; die *Differenz existiert hier nur in ihrer Form als Differenz* (wie $y_1 - y$, wenn y Abhängige von x, meist geschrieben wird). Indem wir setzen $x_1 - x = \Delta x$, geben wir der Differenz bereits einen von ihr selbst verschiednen Ausdruck. Wir drücken, wenn auch in unbestimmter Form, den *Wert dieser Differenz* aus als eine von der Differenz selbst verschiedne Grösse! Z. B. $4 - 2$ ist reiner Ausdruck von Differenz zwischen 4 und 2; aber $4 - 2 = 2$ ist die Differenz ausgedrückt in 2 (auf der rechten Seite): a) in positiver Form, also nicht mehr als Differenz; b) die Subtraktion ist vollbracht, die Differenz berechnet und $4 - 2 = 2$ liefert mir $4 = 2 + 2$. Die zweite 2 erscheint hier in der positiven *Form des Inkrements* von der *ursprünglichen* 2, also direkt in *einer der Differenzform entgegengesetzten Form.* (Ebenso $a - b = c$, $a = b + c$, wo c als Inkrement von b erscheint, ebenso in $x_1 - x = \Delta x$, $x_1 = x + \Delta x$, wo Δx unmittelbar als Inkrement von x auftritt.)

Das blosse ursprüngliche Setzen von $x_1 - x = \Delta x$ = anything setzt also an die Stelle der *Differenzform* eine andre, und zwar die Form einer Summe $x_1 = x + \Delta x$, und das nur Differenz ausdrückende $x_1 - x$ zugleich als Äquivalent des Werts dieser Differenz, der Grösse Δx.

Ebenso ergibt sich aus $x_1 - x = \Delta x$, $x_1 - \Delta x = x$. Wir haben hier wieder auf der linken Seite die Differenzform, aber als Differenz zwischen dem angewachsnen x_1 und seinem eignen, selbständig neben es getretnen Inkrement. Die Differenz zwischen ihm und dem Inkrement von $x = \Delta x$ ist eine Differenz, die jetzt schon, wenn auch unbestimmt, einen bestimmten Wert von x ausdrückt.

Geht man aber aus von dem mystischen Differentialcalculus, wo $x_1 - x$ sofort auftritt als $x_1 - x = dx$, und korrigiert man

* Sieh S. **111**. — *Red.*

d'abord dx zu Δx, so geht man aus von $x_1 - x = \Delta x$; also von $x_1 = x + \Delta x$; dies kann aber dann seinerseits wieder umgedreht werden in $x + \Delta x = x_1$, so dass der Anwachs von x wieder die unbestimmte Form x_1 erhält und als solcher direkt in den calculus eintritt. Dies der Ausgangspunkt der von uns angewandten algebraischen Methode.

d) Aus diesen einfachen Formunterschieden ergibt sich sofort eine Grundverschiedenheit in der Behandlung des calculus, die wir im einzelnen nachgewiesen (sieh beiliegende lose Blätter) bei Analyse der D'Alembertschen Methode. Hier nur im allgemeinen zu bemerken.

1) Tritt die *Differenz* $x_1 - x$ (also auch $y_1 - y$) sofort als ihr Gegenteil, *als Summe* $x_1 = x + \Delta x$ auf, ihre Wertgrösse daher sofort in *der positiven Form des Inkrements* Δx, so, wenn in der *Originalfunktion* in x überall statt x gesetzt wird $x + \Delta x$, werden zu entwickeln [sein] Binome von bestimmtem Grad, und die Entwicklung von x_1 löst sich auf in *Anwendung des binomischen Lehrsatzes*. Der binomische Lehrsatz ist nichts als der allgemeine Ausdruck davon, welchen Ausdruck ein Binom ersten Grads m mal mit sich selbst *multipliziert* liefert. Die *Multiplikation* wird daher zur Entwicklungsmethode von x_1 [oder] $(x + \Delta x)$, wenn wir die *Differenz* von vornherein als *ihr Gegenteil*, als *Summe* darstellen.

2) Da in dem allgemeinen Ausdruck $x_1 = x + \Delta x$ die Differenz $x_1 - x$ unter der positiven Form Δx, i. e. unter der Form des *Inkrements*, *letztes oder zweites* Glied des Ausdrucks ist, so wird x erstes und Δx zweites Glied der Originalfunktion in x, sobald diese als Funktion in $x + \Delta x$ sich darstellt. Wir wissen aber aus dem binomischen Lehrsatz, dass das zweite Glied nur als Faktor in aufsteigenden Potenzen neben dem ersten Glied figuriert, als Multiplikator, so dass der Faktor des ersten Ausdrucks in x (der durch den Grad des Binoms bestimmt ist) $(\Delta x)^0 = 1$, der Multiplikator des zweiten Glieds $(\Delta x)^1$, der des dritten $(\Delta x)^2$ etc., ist. Die Differenz, unter der positiven Form des Inkrements, tritt also nur als Multiplikator auf, und zwar zuerst wirklich als Multiplikator (da $(\Delta x)^0 = 1$) im zweiten Glied des entwickelten Binoms $(x + \Delta x)^m$.

3) Andrerseits betrachten wir die Entwicklung der Funktionen in x selbst, so gibt uns das binomische Theorem für dies erste Glied, hier x, der Reihe nach seine abgeleiteten Funktionen. Z. B. wenn wir haben $(x + h)^4$, wo h im algebraischen Binom die bekannte, x die unbekannte Grösse sei, so erhalten wir

$$x^4 + 4x^3h + \text{etc.}$$

$4x^3$, das im zweiten Glied steht und h in der ersten Potenz zum Faktor hat, ist also die erste abgeleitete Funktion von x, oder algebraisch ausgedrückt: wenn wir den *unentwickelten Ausdruck des Binoms* $(x + h)^4$ haben, so gibt uns die Entwicklungsreihe als erster Zuwachs zu x^4 (als Inkrement davon) $4x^3$, welches als Koeffizient von h auftritt. Ist aber x eine variable Grösse und haben wir $f(x) = x^4$, so wird dies durch sein Anwachsen selbst zu $f(x + h)$ oder in der ersten Form

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^4 = x^4 + 4x^3 \Delta x + \text{etc.}$$

x^4, das uns im gewöhnlichen algebraischen Binom $(x + h)^4$ als erstes Glied dieses Binom[ialenentwicklungs] geliefert wird, erscheint jetzt im binomischen Ausdruck der Variablen x, in $(x + \Delta x)^4$ als Reproduktion der Originalfunktion in x, bevor sie wuchs und zu $(x + \Delta x)$ wurde. Es ist von vornherein aus der Natur des binomischen Lehrsatzes klar, dass wenn $f(x) = x^4$ zu $f(x + h) = (x + h)^4$ wird, das erste Glied von [der Entwicklung des] $(x + h)^4$ ist gleich x^4, d. h. = der Originalfunktion in x sein muss; $(x + h)^4$ muss beides enthalten, die Originalfunktion in x (hier x^4) + dem Zusatz aller Glieder, die x^4 dadurch erwirbt, dass es zu $(x + h)^4$ geworden, also das erste Glied [der Entwicklung] des Binoms $(x + h)^4$ [die Originalfunktion ist].

4) Ferner: das zweite Glied der binomischen Entwicklung $4x^3h$ liefert uns sofort *fix und fertig* die erste aus x^4 abgeleitete Funktion, nämlich $4x^3$. Diese Ableitung also gewonnen durch die Entwicklung von

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^4;$$

gewonnen dadurch, dass die Differenz $x_1 - x$ von Anfang an als ihr *Gegenteil*, als *Summe* $x + \Delta x$, dargestellt wurde.

Es ist also die binomische Entwicklung von $f(x + \Delta x)$ oder y_1, wozu $f(x)$ durch das Wachsen von x geworden, die uns die erste Abgeleitete, den Koeffizient von h (in der binomischen Reihe) liefert, und zwar gleich beim Beginn der binomischen Entwicklung, in ihrem zweiten Glied. Die Ableitung ist also in keiner Weise durch Differentiation gewonnen, sondern einfach durch Entwicklung von $f(x + h)$ oder y_1 in einem bestimmten, durch einfache Multiplikation hervorgebrachten Ausdruck.

Der Angelpunkt dieser Methode ist also die Entwicklung des unbestimmten Ausdrucks y_1 oder $f(x + h)$ in bestimmter binomischer Form, keineswegs aber die Entwicklung von $x_1 - x$ und daher auch von $y_1 - y$ oder $f(x + h) - f(x)$ als Differenzen.

5) Die einzige Differenzgleichung, die in dieser Methode vorkommt, ist die, dass, da wir sofort erhalten:

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^4 = x^4 + 4x^3 \Delta x + 6x^2 \Delta x^2 + 4x \Delta x^3 + \Delta x^4,$$

wenn wir schreiben:

$$x^4 + 4x^3\,\Delta x + 6x^2\,\Delta x^2 + 4x\,\Delta x^3 + \Delta x^4 - x^4,$$

also die Originalfunktion x^4, die den Anfang der Reihe bildet, hinten wieder abziehn, wir das *Inkrement* vor uns haben, das die Originalfunktion in x durch die binomische Entwicklung erhalten hat. Newton schreibt deshalb auch so. Wir haben also das Inkrement

$$4x^3\,\Delta x + 6x^2\,\Delta x^2 + 4x\,\Delta x^3 + \Delta x^4,$$

das Inkrement der Originalfunktion x^4. Wir brauchen deshalb auf der umgekehrten Seite *keinen Differenz[ausdruck] irgendeiner Art.* Dem Inkrement von x entspricht das Inkrement von y, wenn

$$y \text{ oder } f\cdot(x) = x^4.$$

Also schreibt Newton auch sofort:

$$dy, \textit{ bei ihm } \dot{y} = 4x^3\dot{x} + \text{etc.}$$

6) Die ganze Weiterentwicklung besteht nun darin, dass wir die fix und fertig Abgeleitete $4x^3$ zu befreien haben von ihrem Faktor Δx und von ihren Nebengliedern, loszuschälen haben von ihrer Umgebung. Dies also keine Entwicklungs-, sondern *Loswicklungsmethode.*

e) Die Differentiation der $f(x)$ (als [eines] allgemeinen Ausdrucks).

Bemerken wir d'abord, dass der Begriff der «abgeleiteten Funktion» für die sukzessiven Realäquivalente der symbolischen Differentialkoeffizienten, den ursprünglichen Entdeckern des Differentialcalculus und ihren ersten Nachfolgern ganz unbekannt, in der Tat erst durch Lagrange eingeführt ward. Bei den erstern figuriert nur die abhängige Variable, z. B. y als *Funktion von x*, ganz entsprechend dem ursprünglichen algebraischen Sinn von *Funktion*, zuerst angewandt für sogenannte undeterminierte Gleichungen, wo mehr Unbekannte als Gleichungen gegeben, wo also z.B. y verschiedne Werte annimmt, je nachdem für x verschiedne Werte unterstellt werden. Bei Lagrange aber ist die Originalfunktion der bestimmte algebraische Ausdruck von x, der differenziert werden soll; also wenn y oder $f(x) = x^4$, so ist x^4 die Originalfunktion, $4x^3$ die erste Abgeleitete usw. Um also die Konfusion zu vermeiden, ist y die Abhängige oder $f(x)$, *Funktion von x* zu nennen, dagegen die Originalfunktion im Lagrangeschen Sinn *Originalfunktion in x* und entsprechend die «Abgeleiteten» Funktionen *in x.*

In der algebraischen Methode, wo wir erst f^1, die vorläufig Abgeleitete oder [das Verhältnis der] endlichen Differenzen entwickeln, und erst aus ihr die definitive Abgeleitete f', wissen wir von vornherein: $f(x) = y$, also a) $\Delta f(x) = \Delta y$, und daher umgedreht $\Delta y = \Delta f(x)$.

Was zunächst zu entwickeln ist, ist grade $\Delta f(x)$, der Wert der endlichen Differenz von $f(x)$.

Wir finden:

$$f^1(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \text{also} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = f^1(x).$$

Also auch:

$$\Delta y = f^1(x)\,\Delta x,$$

und da $\Delta y = \Delta f(x)$, so

$$\Delta f(x) = f^1(x)\,\Delta x.$$

Die weitere Entwicklung des Differentialausdrucks, die uns schliesslich liefert

$$df(x) = f'(x)\,dx,$$

ist bloss Differentialausdruck der vorher entwickelten endlichen Differenz.

In der gewöhnlichen Methode wird

$$dy \text{ oder } df(x) = f'(x)\,dx$$

überhaupt nicht entwickelt, sondern, sieh oben, das fix und fertig durch das Binom $(x + \Delta x)$ oder $(x + dx)$ gelieferte $f'(x)$ nur *losgewickelt* von seinem Faktor und seinen Nebengliedern.

Anmerkung des Herausgebers

1 Dies ist eine explizite Formulierung dessen, was in der von uns vorgeschlagenen Terminologie „Intensionalität" (eines Gegenstandes oder eines Begriffs) heißt. Die Differenz wird einmal als Differenz, d.h. als Verhältnis zweier Größen, das andere Mal als Wert der Differenz, als eine unterschiedslose Größe aufgefaßt; extensional sind beide Auffassungen identisch. Vgl. Punkt IV der Einleitung.

X

1. AUS DEM MANUSKRIPT «TAYLOR'S THEOREM, MAC LAURIN'S THEOREM UND LAGRANGE'S THEORIE DER ABGELEITETEN FUNKTIONEN»

I

Newton's Entdeckung des binomischen (in seiner Anwendung auch polynomischen) Theorems revolutionierte die ganze Algebra, indem sie zuerst eine *allgemeine Theorie der Gleichungen* ermöglichte.

Das binomische Theorem — und dies haben die Mathematiker entschieden anerkannt, namentlich seit Lagrange,— ist aber auch die Hauptbasis des Differentialcalculs. Schon der Augenschein zeigt, dass ausser den Kreisfunktionen, deren Ausgänge die Trigonometrie liefert, alle monomischen Differentials wie x^m, a^x, $\log x$ etc. allein aus dem binomischen Theorem entwickelt werden.

Es ist jetzt sogar Lehrbuchsmode, nachzuweisen, dass wie aus Taylor's und Mac Laurin's Theoremen das binomische Theorem entwickelbar, so umgekehrt[1]. Dennoch ist nirgendwo, selbst nicht bei Lagrange, dessen Theorie der abgeleiteten Funktionen dem Differentialcalculus eine neue Basis gab, der Zusammenhang zwischen dem binomischen Lehrsatz und jenen Theoremen in seiner ganzen waldursprünglichen Einfachheit klargelegt worden, und es ist hier wie überall wichtig, der Wissenschaft den Schleier des Geheimnisvollen abzureissen.

Taylor's Theorem[2] historisch vorangehend dem des Mac Laurin', gibt — unter bestimmten Voraussetzungen — für jede Funktion x, die um ein positives oder negatives Inkrement h wächst, also im allgemeinen für $f(x \pm h)$, eine Serie symbolischer Ausdrücke anzeigend, durch welche Reihe von Differentialoperationen $f(x \pm h)$ entwickelbar. Es handelt sich hier also um Entwicklung einer beliebigen *Funktion x, sobald sie variiert.*

Mac Laurin[3] dagegen — auch unter bestimmten Voraussetzungen — gibt die allgemeine Entwicklung *jeder Funktion x selbst*, ebenfalls in einer Serie symbolischer Ausdrücke, die zeigt, wie solche Funktion, deren Lösung algebraisch oft sehr weitläufig und kompliziert, durch den Differentialcalcul, leicht zu finden. Die Entwicklung beliebiger Funktion x meint aber nichts als die *Entwicklung der mit* [Potenzen] *der unabhängigen Variablen x kombinierten konstanten Funktionen*, denn die Entwicklung der Variablen selbst wäre identisch mit ihrer Variation, also mit dem Objekt des Taylorschen Theorems.

Beide Theoreme sind grossartige Verallgemeinerungen, worin die Differentialsymbole selbst zum Inhalt der Gleichung werden. Statt der wirklich sukzessiv abgeleiteten Funktionen von x werden nur dargestellt die Abgeleiteten unter der Form ihrer symbolischen Äquivalente, welche ebenso viele zu verrichtenden Operationsstrategeme anzeigen, unabhängig von der Gestalt der Funktion $f(x)$ oder der Funktion $f(x+h)$. So werden zwei Formeln erhalten, die auf alle besondern Funktionen x oder $x+h$ anwendbar mit gewissen Einschränkungen.

Formel Taylor's:

$f(x+h)$ oder $y_1 =$

$$= y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{d^4y}{dx^4} \frac{h^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.}$$

Formel Mac Laurin's:

$f(x)$ oder $y =$

$$= (y) + \left(\frac{dy}{dx}\right) \frac{x}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.}$$

Der blosse Augenschein zeigt, dass hier historisch, wie theoretisch, das was man die *Arithmetik des Differentialcalculus* nennen kann, d.h. die Entwicklung seiner Grundoperationen, bereits als vorhanden und bekannt vorausgesetzt wird. Dies im folgenden nicht zu vergessen, wo ich diese Bekanntschaft unterstelle.

II

. . . .

Mac Laurin's Theorem kann als *besondrer Kasus* von Taylor's Theorem betrachtet werden.

Bei Taylor haben wir:

$$y = f(x),$$

$$y_1 = f(x+h) = f(x) \text{ oder } y + \frac{dy}{dx} h + \frac{1}{2} \frac{d^2y}{dx^2} h^2 + \text{etc.} +$$

$$+ \left[\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}\right] \frac{d^ny}{dx^n} h^n + \text{etc.}$$

Setzen wir in $f(x+h)$ und ebenso auf der rechten Seite in y oder $f(x)$ und seinen unter der Form $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. symbolisch abgeleiteten Funktionen $x=0$, so dass die nichts mehr erhalten als die Entwicklung des konstanten Elements von x, so:

$$f(h)=(y)+\left(\frac{dy}{dx}\right)h+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{h^2}{1\cdot 2}+\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\text{etc.}$$

$y_1=f(x+h)=f(0+h)$ wird dann dieselbe Funktion von h, welche $y=f(x)$ von x ist, da h in $f(h)$ eingeht, wie x in $f(x)$, und (y) in $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ etc. jede Spur von x ausgelöscht ist.

Wir können daher auf beiden Seiten x statt h setzen und erhalten dann:

$$f(x)=(y) \text{ oder } f(0)+\left(\frac{dy}{dx}\right)x+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{x^2}{1\cdot 2}+\text{etc.}+$$
$$+\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}+\text{etc.}$$

Oder wie andere das geschrieben haben:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{1\cdot 2}+f'''(0)\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\text{etc.}$$

wie z.B. in der Entwicklung $f(x)$ oder $(c+x)^m$:

$$(c+0)^m=f(0)=c^m,$$

$$m(c+0)^{m-1}x=mc^{m-1}x=f'(0)x \text{ etc.}$$

Ich werde im folgenden, wo wir zu Lagrange kommen, Mac Laurin's Theorem als bloss besonderen Kasus von dem Taylor's nicht weiter berücksichtigen. Hier sei nur noch bemerkt, dass es ebenso seine so g. «failures» hat wie Taylor's Theorem. Bei ersterem entspringen die failures alle aus der irrationellen Natur der konstanten Funktion, bei letzterem aus der der variablen.

Man kann sich nun fragen:

Hatte Newton bloss die Resultate der Welt gebend, wie er das z.B. in der «*Arithmetica Universalis*» bei den schwierigsten Fällen tut, nicht ganz im stillen für eigenen Privatgebrauch aus dem binomischen Lehrsatz, den er entdeckt, sich Taylor's und Mac Laurin's Theoreme bereits entwickelt? Dies ist mit absoluter Sicherheit zu verneinen: er war nicht, der seinen Schülern die Aneignung solcher

Entdeckung zu überlassen. Er war in der Tat noch zu sehr absorbiert durch die Ausarbeitung der Differentialoperationen selbst, die schon als gegeben und bekannt bei Taylor und Mac Laurin vorausgesetzt sind. Zudem gelangte Newton, wie seine ersten elementaren Formeln des calculus zeigen, offenbar zunächst zu denselben von mechanischen nicht der reinen Analysis angehörigen Ausgangspunkten.

Was andererseits Taylor und Mac Laurin betrifft, so arbeiten und bewegen sie sich von vornherein auf dem Boden des Differentialcalculus selbst und hatten darnach keinen Anlass, die möglichst einfachen algebraischen Ausgangspunkte desselben zu suchen, um so weniger als der Streit zwischen den Newtonianern und Leibnizianern sich um bestimmte, bereits fertige Formen des calculs als einer neu entdeckten, ganz aparten, von der gewöhnlichen Algebra himmelweit verschiednen Disziplin der Mathematik drehte.

Der Zusammenhang ihrer respektiven *Ausgangsgleichungen* mit dem binomischen Lehrsatze verstand sich für sie von selbst, aber nicht mehr so, als z.B. bei der Differenzierung von xy oder $\frac{x}{y}$ es sich von selbst versteht, dass dies durch die gewöhnliche Algebra gelieferte Ausdrücke sind.

Die wirklichen und daher einfachsten Zusammenhänge des Neuen mit dem Alten werden immer erst entdeckt, sobald dies Neue selbst schon eine in sich abgerundete Form gewonnen, und man kann sagen, dass der Differentialcalcul diese relation erhielt durch die Taylorschen und Mac Laurinschen Theoreme. Es fiel daher erst Lagrange zu, den Differentialcalculus auf strikt algebraische Basis zurückzuführen. Vielleicht ging ihm darin voran *John Landen*, englischer Mathematiker um Mitte des 18. Jh., in seiner «*Residual Analysis*». Doch muss ich dies Buch erst im Museum sehn, bevor ich darüber urteilen kann.

III. Lagranges Funktionstheorie

Lagrange geht aus von der algebraischen Begründung des Taylorschen Theorems, also der allgemeinsten Formel des Differentialcalculus.

Es ist nur zu bemerken mit Bezug auf Taylor's Ausgangsgleichung:

$$y_1 \text{ oder } f(x+h)=y \text{ oder } f(x)+Ah+Bh^2+Ch^3+\text{etc.}$$

1) Diese Reihe ist in keiner Weise bewiesen; $f(x+h)$ ist kein Binom von einem *bestimmten* Grad; $f(x+h)$ ist vielmehr der

unbestimmte allgemeine Ausdruck jeder Funktion [der Variablen] x, welche [x] um ein positives oder negatives Inkrement h wächst; $f(x+h)$ schliesst also Funktionen x von jedem Grad ein, schliesst aber zugleich jeden bestimmten Grad der Entwicklungsreihe selbst aus. Taylor selbst setzt daher «+ etc.» ans Ende der Reihe. Dass aber das Gesetz der Entwicklungsreihe, welches gültig für bestimmte Funktionen x, die ein Inkrement erhalten— ob sie nun darstellbar in endlicher Gleichung oder endloser Reihe—, ohne weiteres anwendbar auf die unbestimmte allgemeine $f(x)$ und daher ebenso unbestimmte allgemeine $f(x_1)$ oder $f(x+h)$, ist erst zu *beweisen*.

2) Die Gleichung wird dadurch in die Differentialsprache übersetzt, dass sie doppelt differenziert wird, d.h. y_1 einmal mit Bezug auf h als variabel und x als konstant, dann aber mit Bezug auf x als variable und h als konstant. So werden zwei Gleichungen hergestellt, deren erste Seiten identisch, während ihre zweite Seiten formverschieden sind. Um aber die unbestimmten Koeffizienten dieser zweiten Seiten, welche alle Funktionen von x sind, gleichsetzen zu können, wird, was dazu erheischt, auch vorausgesetzt, dass die einzelnen Koeffizienten A, B, etc. *zwar unbestimmte, aber endliche Grössen* sind, und ebenso, dass die sie begleitenden Faktoren h in *ganzen und positiven Potenzen* aufsteigen. Gesetzt, was nicht der Fall, Taylor hätte das alles bewiesen für die $f(x+h)$, solange x in $f(x)$ *allgemein* bleibt, so gälte das deswegen noch keineswegs, sobald Funktionen x bestimmte partikuläre Werte annehmen. Diese könnten umgekehrt unverträglich sein mit der Behandlung durch seine Reihe

$$y_1 = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} h^2 + \text{etc.}$$

Mit einem Wort: die Bedingungen oder Voraussetzungen, die in Taylor's unbewiesener Ausgangsgleichung involviert sind, finden sich natürlich auch in dem daraus abgeleiteten Theorem:

$$y_1 = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} h^2 + \text{etc.}$$

Es ist daher unanwendbar auf gewisse Funktionen von x, die jenen Voraussetzungen widersprechen. Daher die sog. *failures* des Theorems.

Lagrange begründet die Ausgangsgleichung algebraisch und zeigt zugleich durch deren Entwicklung selbst, welche partikulären Fälle, als ihrem *allgemeinen* Charakter, d.h. dem allgemeinen, unbestimmten Charakter der Funktion von x widersprechend, von selbst ausgeschlossen sind.

H) 1) Das grosse Verdienst Lagrange's ist, nicht nur das Taylorsche Theorem und überhaupt den Differentialcalculus durch die rein algebraische Analyse begründet, sondern namentlich auch den Begriff der abgeleiteten Funktionen eingeführt zu haben, den in der Tat alle seine Nachfolger mehr oder minder benutzen, auch ohne davon zu sprechen. Aber er hat sich damit nicht begnügt. Er gibt die rein algebraische Entwicklung aller möglichen Funktionen $x + h$, mit aufsteigenden, ganzen, positiven Potenzen von h und erteilt ihnen dann die Taufnamen des Differentialcalculus. Alle Leichtigkeiten und Abkürzungen, die der Differentialcalcul (Taylor's Theorem etc.) selbst gewahrt, werden damit eingebüsst und sehr oft durch algebraische Operationen von viel mehr weitläufiger und komplizierter Natur ersetzt.

2) Soweit es sich um reine Analysis handelt, wird Lagrange in der Tat alles los, was ihm als metaphysische Transzendenz erscheint in Newton's Fluxionen, Leibniz' Infinitesimals verschiedener Ordnung, der Grenzwerttheorie der verschwindenden Grössen, der Einsetzung von $\frac{0}{0}\left(=\frac{dy}{dx}\right)$ als Symbol für die Differentialkoeffizienten etc. Dies verhindert jedoch nicht, dass er in der Anwendung seiner Theorie und Kurven etc. selbst beständig einer oder der anderen dieser «metaphysischen» Vorstellungen bedarf.

Anmerkungen des Herausgebers

1 Die Mittelwertsätze der Differentialrechnung führen sehr einfach zum Taylorschen Theorem, so daß dies das heute übliche Vorgehen beim axiomatischen Aufbau der Infinitesimalrechnung ist. Mit dem Theorem wird dann die (auf reelle Exponenten verallgemeinerte) binomische Formel bewiesen.

2 Unter der Voraussetzung, daß die auftretenden Ableitungen existieren und x sowie x + h im Definitionsbereich von f liegen, gilt $f(x+h) = \sum f^{(i)}(x) \cdot \frac{h^i}{i!} + R_n(x,h)$, wobei h positiv und negativ sein darf und das Restglied R_n eine Funktion der n + 1-ten Ableitung von f ist. Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x,h) = 0$, so erhält man $f(x+h) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} f^{(i)}(x) \cdot \frac{h^i}{i!}$ — die von Marx diskutierte Form des Taylorschen Satzes.

3 Entwicklung von f(x+h) nach der Formel von Taylor für x=0

XI

2. AUS DEM UNBEENDETEN MANUSKRIPT «TAYLOR'S THEOREM»

Wenn also in dem Theorem von Taylor 1) übernommen aus einer *spezifischen Form* des binomischen Theorems, wo $(x+h)^m$ vorausgesetzt, dass *m ganze und positive Potenz* ist, also auch die Faktoren in $h = h^0$, h^1, h^2, h^3 etc. sind, d.h. h in ganzer, aufsteigender, positiver Potenz [ist], so [auch] 2) dass wie in dem algebraischen binomischen Theorem *allgemeiner* Form, die *abgeleiteten Funktionen von x* bestimmte und soweit *endliche Funktionen in x* sind. Es kommt aber noch eine dritte Bedingung hinzu. Die abgeleiteten Funktionen von x können nur $=0$, $=+\infty$, $=-\infty$ werden und ebenso $h^{[k]}$ nur $= h^{-1}$ oder $h^{m/n}$ (z.B. $h^{1/2}$), wenn die Variable x *partikuläre Werte* annimmt, z.B. $x = a$.

Allgemein zusammengefasst: das *Taylorsche Theorem* ist allgemein nur anwendbar zur Entwicklung von Funktionen in x, in welcher $x = x + h$ wird oder wächst, aus x zu x_1 wird, wenn 1) die unabhängige Variable x die allgemeine, *unbestimmte Form x* beibehält, 2) die Originalfunktion in x selbst durch Differentiation entwickelbar in einer Reihe *bestimmter* und soweit *endlicher*, *abgeleiteter Funktionen in x*, mit entsprechenden Faktoren von h mit aufsteigenden, positiven und ganzen Exponenten, also mit h^1, h^2, h^3 etc.

Alle diese Bedingungen aber sind ein andrer Ausdruck dafür, dass dies Theorem nur das in Differentialsprache übersetzte binomische Theorem mit *ganzen und positiven Exponenten ist.*

Wo diese Bedingungen nicht erfüllt sind, d.h., wo das *Taylorsche Theorem nicht anwendbar*, tritt das ein, was im Differentialcalcul figuriert als die «*failures*» dieses Theorems.

Die grösste *failure* des Taylorschen Theorems sind aber nicht diese besonderen failures der Anwendung, sondern *die allgemeine failure*, dass

$$y = f(x) \quad [\text{und}] \quad y_1 = f(x+h),$$

welche nur symbolische Ausdrücke eines Binoms von irgendwelchem Grad [84], verwandelt werden in Ausdrücke, wo $f(x)$ eine Funktion von x, die alle Grade einschliesst und deshalb selbst *keinen Grad* hat, so dass $y_1 = f(x + h)$ ebenfalls alle Grade einschliesst und selbst von keinem Grad ist, vielmehr der *unentwickelte allgemeine Ausdruck* jeder Funktion der Variablen x wird, sobald sie wächst. Die Entwicklungsreihe, worin sich dies ungradige $f(x + h)$ expandiert, nämlich $y + Ah + Bh^2 + + Ch^3 +$ etc., schliesst daher auch alle Grade ein, ohne selbst irgendeines Grades zu sein.

Dieser Sprung aus der *gewöhnlichen Algebra*, und zwar *vermittelst der gewöhnlichen Algebra*, in die *Algebra der Variablen* ist vorausgesetzt als *un fait accompli*, er ist nicht bewiesen und ist prima facie im *Widerspruch zu allen Gesetzen* der gewöhnlichen Algebra, wo $y = f(x)$, $y_1 = f(x + h)$ niemals diesen Sinn haben können.

In andern Worten: die Ausgangsgleichung

$$y_1 \text{ oder } f(x + h) = y \text{ oder } f(x) + Ah + Bh^2 + \\ + Ch^3 + Dh^4 + Eh^5 + \text{etc.}$$

ist nicht nur *nicht bewiesen*, sondern setzt bewusst oder unbewusst eine Substitution von *Variablen* für *Konstante* voraus — denn die Algebra, also auch das algebraische Binom, lässt nur Konstante zu und zwar nur Konstante von zweierlei Sorte, *bekannte* und *unbekannte* —, die allen Gesetzen der Algebra ins Gesicht schlägt! Die Ableitung dieser Gleichung aus der Algebra scheint daher auf einem Betrug zu beruhn.

Wenn nun dennoch tatsächlich das *Taylorsche Theorem* — dessen failures in der Anwendung kaum ins Gewicht fallen, da sie faktisch beschränkt sind auf Funktionen in x, die auf dem Weg der Differentiation kein Resultat liefern können, also überhaupt der Behandlung durch den Differentialcalcul unzugänglich sind — sich in der Praxis als die zusammenfassendste, allgemeinste und erfolgreichste *Operationsformel* des ganzen Calculus ausgewiesen hat, so ist dies nur das crowning of the edifice der Newtonschen Schule, der er angehörte, und der Newton-Leibnizschen Entwicklungsperiode des Differentialcalculus überhaupt, welcher gleich in seinen ersten Ansätzen wahre Resultate aus falschen Prämissen zieht.

Der algebraische Beweis von Taylors Theorem ist nun geliefert worden von *Lagrange* und bildet überhaupt die Basis *seiner* algebraischen Methode des Differentialcalculs. Auf die Sache selbst werde ich näher eingehn beim etwaigen historischen Teil dieses Manuskripts.

Hier als *lusus historiae* sei nur dies bemerkt, dass Lagrange keineswegs auf die unbewusste Grundlage Taylors zurückgeht — auf das binomische Theorem, und zwar das binomische Theorem in elementarster

Form, wo es nur aus zwei Grössen $(x + a)$ oder hier $(x + h)$ besteht und einen positiven, [ganzen] Exponenten hat.

Noch viel weniger geht er weiter zurück und fragt sich, warum erscheint das in Differentialform übersetzte und zugleich von seinen algebraischen Bedingungen durch einen Gewaltstreich befreite binomische Theorem Newtons als zusammenfassende allgemeine Operationsformel des von ihm gegründeten Calculus? Die Antwort war einfach; weil Newton von vornherein $x_1 - x = dx$ setzt, also $x_1 = x + dx$. Die Entwicklung der *Differenz* verwandelt sich also sofort in Entwicklung einer *Summe*, in Entwicklung des Binoms $(x + dx)$ (wobei wir ganz davon absehn, dass er hätte setzen müssen $x_1 - x = \Delta x$ oder h) (also $x_1 = x + \Delta x$ oder $= x + h$). Taylor entwickelt diese Grundlage des Systems nur zur dessen allgemeinsten und zusammenfassendsten Form, was überhaupt erst möglich war, sobald alle Grundoperationen des Differentialcalculus entdeckt waren, denn welchen Sinn hatten seine $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc., wenn man nicht für alle wesentlichen Funktionen in x bereits ihr entsprechendes $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. zu entwickeln fähig?

Lagrange umgekehrt schliesst sich direkt an Taylor's Theorem an, natürlich von einem Standpunkt, wo einerseits die Nachfolger der Newton-Leibnizschen Epoche ihm bereits die korrigierte Ausgabe des $x_1 - x = dx$ geliefert, also auch $y_1 - y = f(x + h) - f(x)$, er andrerseits grade in der Algebraisierung der Taylorschen Formel seine eigne Theorie der *«abgeleiteten» Funktionen* produzierte. ⟦So schloss sich Fichte an Kant, Schelling an Fichte, Hegel an Schelling an, ohne dass weder Fichte, Schelling, Hegel die allgemeine Grundlage Kants, i.e. den Idealismus überhaupt untersucht hätten; die hätten ihn sonst nicht fortentwickeln können⟧.

Anmerkung des Herausgebers

1 Beim Übergang zur Diffentialrechnung sind hinsichtlich des Begründungsproblems soweit wie möglich die Konsequenzen des Wechsels des Gegenstandes zu reflektieren; zunächst also der fundamentale Übergang von k o n s t a n t e n zu v a r i a b l e n (genetisch gewonnenen) Größen, dann daraus abgeleitet, auf der nächsthöheren theoretischen Ebene, der von der Ableitung i n e i n e m P u n k t zur abgeleiteten F u n k t i o n, von der (z.B. Taylor —) Entwicklung in einem Punkt zur Entwicklung einer Funktion, usw.

XII

ÜBER DIE MEHRDEUTIGKEIT DER TERMEN «GRENZE» UND «GRENZWERT»

I) x^3;

a) $(x+h)^3 = x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3$;

b) $(x+h)^3 - x^3 = 3x^2h + 3xh^2 + h^3$;

c) $\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$.

Wird $h = 0$, so

$\frac{(x+0)^3 - x^3}{0}$ oder $\frac{x^3 - x^3}{0} = \frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx}$ und die rechte Seite $= 3x^2$,

also:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

$$y = x^3; \qquad y_1 = x_1^3;$$

$$y_1 - y = x_1^3 - x^3 = (x_1 - x)(x_1^2 + x_1 x + x^2);$$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ oder } \frac{dy}{dx} = x^2 + xx + x^2;$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

II) Setzen wir $x_1 - x = h$, so:

1) $(x_1 - x)(x_1^2 + x_1 x + x^2) = h(x_1^2 + x_1 x + x^2)$;

2) also:

$$\frac{y_1 - y}{h} = x_1^2 + x_1 x + x^2.$$

In 1) ist der Koeffizient von h *nicht die fertig Abgeleitete*, wie oben f', sondern f^1; die Division beider Seiten durch h liefert daher auch nicht $\frac{dy}{dx}$, sondern

$$\frac{\Delta y}{h} \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta x} = x_1^2 + x_1 x + x^2$$

etc. etc.

Wenn wir auf der andern Seite in I c), nämlich in

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ oder } \frac{y_1-y}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2,$$

von der Vorstellung ausgehn, dass auf der rechten Seite, je mehr der Wert von h abnimmt, desto mehr der Wert der Glieder $3xh + h^2$ abnimmt, also auch der Wert der ganzen rechten Seite $3x^2 + 3xh + h^2$ sich immer mehr dem Wert $3x^2$ nähert, so müssen wir aber hinzusetzen: ohne je mit ihm zusammenfallen zu können.

$3x^2$ wird so ein Wert, dem sich die Reihe $3x^2 + 3xh + h^2$ beständig nähert, ohne ihn je zu erreichen, also noch mehr, ohne ihn je überschreiten zu können. In diesem Sinn wird $3x^2$ *der Grenzwert* der Reihe $3x^2 + 3xh + h^2$.

Andrerseits nimmt die Grösse $\frac{y_1-y}{h}$ $\left(\text{oder } \frac{y_1-y}{x_1-x}\right)$ auch immer mehr ab, je mehr ihr Nenner h abnimmt. Da aber $\frac{y_1-y}{h}$ das Äquivalent von $3x^2+3xh+h^2$, so ist der Grenzwert dieser Reihe sein eigner *Grenzwert* in demselben Sinn, worin er der der ihm äquivalenten Reihe ist.

Sobald wir aber $h = 0$ setzen, verschwinden die Glieder auf der rechten Seite, die $3x^2$ zur Grenze ihres Werts machten; $3x^2$ ist jetzt die erste Abgeleitete von x^3, also $= f'(x)$. Als $f'(x)$ zeigt es an, dass wieder aus ihm $f''(x)$ (im gegebnen Fall $= 6x$) ableitbar etc., dass also das Inkrement $f'(x)$ oder $3x^2$ nicht $=$ der Summe der aus $f(x) = x^3$ entwickelbaren Inkremente. Wäre die $f(x)$ selbst eine endlose Reihe, so natürlich auch die Reihe der aus selber entwickelbaren Inkremente. In diesem Sinne würde aber die entwickelte Reihe der Inkremente, sobald ich sie abbreche, der *Grenzwert* ihrer Entwicklung, *Grenzwert* also hier in dem gewöhnlichen algebraischen oder arithmetischen Sinn, wie der entwickelte Teil eines endlosen Dezimalbruchs *Grenze* seiner möglichen Entwicklung wird, eine Grenze, die aus praktischen oder theoretischen Gründen genügt. Dies hat absolut nichts gemein mit dem Grenzwert im ersten Sinn.

Der Grenzwert im zweiten Sinn ist hier je nach Belieben *vergrösserbar*, während dort [der Wert des Ausdrucks] nur *verkleinerbar*. Ferner:

$$\frac{y_1-y}{h}=\frac{y_1-y}{x_1-x},$$

solange h sich nur verkleinert nähert sich nur dem Ausdruck $\frac{0}{0}$; er ist eine Grenze, die es nie erreichen und noch weniger überschreiten kann, und sofern kann $\frac{0}{0}$ als sein *Grenzwert* betrachtet werden.

Aber sobald $\frac{y_1-y}{h}$ verwandelt in $\frac{0}{0}=\frac{dy}{dx}$, hat letzteres aufgehört der Grenzwert von $\frac{y_1-y}{h}$ zu sein, indem letzteres selbst in seiner Grenze verschwunden ist. Mit Bezug auf seine frühere Form $\frac{y_1-y}{h}$ oder $\frac{y_1-y}{x_1-x}$ können wir nur sagen, dass $\frac{0}{0}$ dessen absoluter Minimalausdruck ist, der isoliert betrachtet kein Wertausdruck ist; aber $\frac{0}{0}$ $\left(\text{oder } \frac{dy}{dx}\right)$ hat jetzt als reales Äquivalent $3x^2$ gegenüber, d.h. $f'(x)$.

Und so in der Gleichung

$$\frac{0}{0}\left(\text{oder } \frac{dy}{dx}\right)=f'(x)$$

ist keine der beiden Seiten Grenzwert der andern. Sie haben kein *Grenzverhältnis* zueinander, sondern ein *Äquivalentverhältnis.*[1]

Wenn ich habe: $\frac{6}{3}=2$, so ist weder 2 Grenze von $\frac{6}{3}$ noch $\frac{6}{3}$ Grenze von 2. Dies käme nur auf die abgeschmackte Tautologie hinaus, dass der Wert einer Grösse = der Grenze ihres Werts.

Der Begriff des Grenzwerts ist also missdeutbar und wird beständig missdeutet. Auf Differentialgleichungen angewandt ist er als Mittel, das Setzen von x_1-x oder $h=0$ vorzubereiten und letztres der Vorstellung näher zu bringen, eine Kinderei, die ihren Ursprung in der ersten mystischen und mystifizierenden Methode des Calculus hat.

In der Anwendung der Differentialgleichungen auf Kurven etc. dient er wirklich zu geometrischer Veranschaulichung.

Anmerkungen des Herausgebers

1 Die Betonung des Äquivalentenverhältnisses zwischen symbolischer und realer Seite der Gleichung verweist erneut auf den Realismus der Marxschen Position; danach ist das Resultat bei allem Insistieren auf der Unverzichtbarkeit des Aspekts der genetischen Analyse und Konstruktion nicht auf die Genesis reduzierbar.

XIII

VERGLEICHUNG VON D'ALEMBERT'S METHODE MIT DER ALGEBRAISCHEN

Vergleichen wir D'Alembert's Methode mit der algebraischen.

I) $f(x)$ oder $y = x^3$;

a) $f(x+h)$ oder $y_1 = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$;

b) $f(x+h) - f(x)$ oder $y_1 - y = 3x^2h + 3xh^2 + h^3$;

c) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ oder $\frac{y_1 - y}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$;

wenn $h = 0$:

d) $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx} = 3x^2 = f'(x)$.

II) $f(x)$ oder $y = x^3$;

a) $f(x_1)$ oder $y_1 = x_1^3$;

b) $f(x_1) - f(x)$ oder $y_1 - y = x_1^3 - x^3 = (x_1 - x)(x_1^2 + x_1x + x^2)$;

c) $\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1 - x}$ oder $\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = x_1^2 + x_1x + x^2$.

Wird $x_1 = x$, so $x_1 - x = 0$, hence:

d) $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx} = (x^2 + xx + x^2) = 3x^2$.

In beiden dasselbe sofern: wächst die unabhängige Variable x, so die abhängige y. Das Ganze kommt darauf an, wie das Wachstum von x ausgedrückt wird. Wird x zu x_1, so $x_1 - x = \Delta x = h$ (unbestimmte, endlos kontrahierbare, aber immer endlich bleibende Differenz).

Δx oder h ist das Inkrement, um welches x gewachsen ist, denn:

a) $x_1 = x + \Delta x$, aber auch umgekehrt b) $x + \Delta x$ oder $x + h = x_1$.

Der Differentialcalcul geht historisch von a) aus, d.h. davon, dass die Differenz Δx oder das Inkrement h (das eine drückt dasselbe aus wie das andre, das eine negativ als Differenz Δx, das andre positiv als Inkrement h) *selbständig existiert* neben der *Grösse* x, deren Inkrement es ist, die es also als *gewachsen* ausdrückt, aber um h gewachsen. Es wird dadurch von vornherein der Vorteil erreicht, dass die diesem allgemeinen Ausdruck entsprechende Originalfunktion der Variablen, sobald sie wächst, in Binomen von bestimmtem Grad ausgedrückt und daher das binomische Theorem von vornherein auf sie anwendbar wird. In der Tat schon auf der allgemeinen, der linken Seite, haben wir ein Binom, nämlich $x + \Delta x$ [solches dass $f(x + \Delta x)$] oder $y_1 =$ etc.

Der mystische Differentialcalculus verwandelt sofort:

$(x + \Delta x)$ in

$(x + dx)$ oder bei Newton in $x + \dot{x}$. Dadurch erhalten wir auch auf der rechten, der algebraischen Seite sofort Binome in $x + dx$ oder $x + \dot{x}$, die dann als gewöhnliche Binome behandelt werden. Die Verwandlung von Δx in dx oder $\dot{x}$ ist unterstellt a priori, statt mathematisch abgewiesen zu sein, daher später die mystischen Unterdrückungen von Gliedern der entwickelten Binome möglich wird.

D'Alembert geht aus von $(x + dx)$, korrigiert aber die Ausdrücke in $(x + \Delta x)$ alias in $(x + h)$; es wird jetzt eine Entwicklung nötig, wodurch Δx oder h in dx verwandelt wird, aber das ist auch alle Entwicklung, die wirklich vorgeht.

Ob falsch von $(x + dx)$ oder richtig von $(x + h)$ ausgegangen wird, dies unbestimmte Binom in die gegebne algebraische [Potenz]funktion von x gesetzt, verwandelt in ein Binom von einem bestimmten Grad, wie in Ia) statt x^3 nun erscheint $(x + h)^3$, und zwar in ein Binom, wo in dem einen Fall dx, im andern h als dessen letztes Glied figuriert, daher auch in der Entwicklung nur als Faktor, womit die durch das Binom abgeleiteten Funktionen äusserlich behaftet sind.

Daher finden wir *gleich in* Ia) die *erste Abgeleitete* von x^3 fertig vor, nämlich als $3x^2$, als Koeffizient im zweiten Glied der Reihe, behaftet mit h. $3x^2 = f'(x)$ bleibt von nun an unverändert. Es selbst ist durch keinen Differentiationsprozess irgendeiner Art abgeleitet, sondern von vornherein durch den binomischen Lehrsatz geliefert, und zwar, weil wir von vornherein das gewachsne x als Binom

$$x + \Delta x = x + h,$$

als um h angewachsnes x dargestellt haben. Die ganze Aufgabe besteht nun darin, die nicht etwa embryonisch existierende, sondern fix und fertige $f'(x)$ von ihrem Faktor h und seinen andern Nebengliedern loszuschälen.

Dagegen in IIa) geht das gewachsne x_1 ganz in derselben Form in die algebraische Funktion ein wie x ursprünglich in sie einging; x^3 wird zu x_1^3. Die Abgeleitete $f'(x)$ kann erst durch 2 sukzessive Differentiationen, und zwar beide von genau unterschiednem Charakter, am Schluss erhalten werden.

In der Gleichung Ib) bereitet zwar die Differenz $f(x+h)-f(x)$ oder y_1-y das Zustandekommen des symbolischen Differentialkoeffizienten vor; mit Bezug auf den realen ändert sie nichts als dass er aus dem zweiten Rang in den ersten der Reihe rückt, und daher seine Befreiung von h möglich wird.

In IIb) erhalten wir auf beiden Seiten den Ausdruck von Differenzen; sie wird auf der algebraischen Seite so entwickelt, dass (x_1-x) als Faktor neben einer abgeleiteten Funktion in x und x_1 erscheint, die erhalten durch Division von $x_1^3-x^3$ durch x_1-x. Erst die Existenz der Differenz $x_1^3-x^3$ machte ihre Zerlegung in zwei Faktoren möglich. Da

$$x_1-x=h,$$

könnten die beiden Faktoren, worin $x_1^3-x^3$ zerlegt, auch geschrieben werden $h(x_1^2+x_1x+x^2)$. Dies zeigt neuen Unterschied von Ib). h selbst als *Faktor der vorläufig Abgeleiteten* ist erst abgeleitet durch die Entwicklung der Differenz $x_1^3-x^3$ als Produkt zweier Faktoren, während h als Faktor der «Abgeleiteten», wie diese selbst in Ia), schon fertig existiert, bevor irgendeine Differenz entwickelt worden ist. Dass das unbestimmte Wachstum von x zu x_1 neben x die getrennte Form des Faktors h annimmt, ist in I) von vornherein unterstellt, in II) (da $x_1-x=h$) bewiesen durch die Ableitung. h ist zwar in I) einerseits unbestimmt, andrerseits aber doch schon soweit bestimmt, als das unbestimmte Wachstum von x bereits als eine *eigne* Grösse erscheint, *um* die x gewachsen ist, daher als solche neben ihm auftritt.

In Ic) wird nun $f'(x)$ von seinem Faktor h befreit; wir erhalten so auf der linken Seite $\frac{y_1-y}{h}$ oder $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, also einen noch endlichen Ausdruck des Differentialkoeffizienten. Auf der andern Seite aber haben wir erreicht, dass indem wir $h=0$ setzen in $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, dies also in $\frac{0}{0}=\frac{dy}{dx}$ verwandeln, wir in Id) einerseits die symbolischen Differentialkoeffizienten erhalten, andrerseits $f'(x)$, die schon in Ia) fertig bestand, nun seine Nebenglieder los wird und allein auf der rechten Seite figuriert.

Positive Entwicklung geht nur auf der linken Seite vor, indem hier der symbolische Differentialkoeffizient hergestellt ist. Auf der rechten Seite besteht die Entwicklung nur darin $f'(x)=3x^2$, das schon in Ia) durch das Binom gefunden, von seinem ursprünglichen Zubehör zu befreien. Die Verwandlung von h in 0 oder $x_1-x=0$ hat auf der rechten Seite nur diesen negativen Sinn.

Dagegen in IIc) ist erst eine *vorläufige Abgeleitete* erhalten, durch Division beider Seiten durch $x_1 - x$ $(= h)$.

Endlich in IId) wird von dem positiven $x_1 = x$ setzen die *definitive Abgeleitete* erhalten. Dies $x_1 = x$ bedeutet aber zugleich $x_1 - x = 0$ setzen und verwandelt daher auf der linken Seite das endliche Verhältnis $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ in $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx}$.

In I) wird ebensowenig die «Abgeleitete» gefunden durch das Setzen von $x_1 - x = 0$ oder $h = 0$, wie in der mystischen Differentialmethode. In beiden Fällen werden die Nebenglieder der von vornherein fertig erscheinenden $f'(x)$ aus dem Weg geräumt, jetzt mathematisch richtig, dort durch einen coup d'état.

XIV

ANALYSE VON D'ALEMBERT'S METHODE MITTELS NOCH EINES BEISPIELS

Entwickeln wir nun nach D'Alemberts Methode:
a) $f(u)$ oder $y = 3u^2$;
b) $f(x)$ oder $u = x^3 + ax^2$.

$$y = 3u^2, \tag{1}$$

$$f(u) = 3u^2. \tag{1a}$$

$$f(u+h) = 3(u+h)^2,$$

$$f(u+h) - f(u) = 3(u+h)^2 - 3u^2 = 3u^2 + 6uh + 3h^2 - 3u^2 = 6uh + 3h^2 \quad (2)$$

(*hier schon die abgeleitete Funktion fertig als Koeffizient von h durch binomischen Lehrsatz*),

$$\frac{f(u+h) - f(u)}{h} = 6u + 3h.$$

Durch die Division wird die schon in (2) fertig gegebne $f'(u) = 6u$ von ihrem Faktor h befreit.

$$\frac{f(u+0) - f(u)}{0} = 6u,$$

$$\frac{y_1 - y}{u_1 - u}, \quad \text{alias} \quad \frac{0}{0} = \frac{dy}{du} = 6u.$$

Hierin den Wert von u aus Gleichung b) gesetzt, gibt

$$\frac{dy}{du} = 6(x^3 + ax^2).$$

Da y in a) differenziert mit Bezug auf u, so

$$(u_1 - u) = h, \quad \text{oder} \quad h = (u_1 - u),$$

da u die unabhängige Variable.

$f(x)$ zunächst als $= \Delta f(x)$ zu erhalten; aber auf der zweiten Seite gibt sie nur den algebraischen Vorteil, die in x gegebne Originalfunktion $x^3 + ax^2$ zu entfernen aus dem Produkt von $(x+h)^3 + + a(x+h)^2$, etc.

Doch fahren wir weiter: Wir haben erhalten für a):

$$\frac{dy}{du} = 6(x^3 + ax^2),$$

und für b):

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 2ax.$$

Multiplizieren wir $\frac{dy}{du}$ mit $\frac{du}{dx}$, so

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx},$$

was gesucht war. Setzen wir hierin die für $\frac{dy}{du}$ und $\frac{du}{dx}$ gefundenen Werte, so: also

$$\frac{dy}{dx} = 6(x^3 + ax^2)(3x^2 + 2ax)$$

und daher, allgemein ausgedrückt, wenn wir haben:

$$y = f(u);\ \frac{dy}{du} = \frac{df(u)}{du}, \qquad u = f(x);\ \frac{du}{dx} = \frac{df(x)}{dx},$$

hence:

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ oder } \frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{df(x)}{dx}.$$

Setzen wir nun in der Gleichung a) $h = u_1 - u$, in der Gleichung b) $h = x_1 - x$, so stellt sich die Sache so dar:

$$y \text{ oder } f(u) = 3u^2,$$

$$f(u + (u_1 - u)) = 3(u + (u_1 - u))^2 = 3u^2 + 6u(u_1 - u) + 3(u_1 - u)^2,$$

$$f(u + (u_1 - u)) - f(u) = 3u^2 + 6u(u_1 - u) + 3(u_1 - u)(u_1 - u) - 3u^2,$$

hence:

$$f(u + (u_1 - u)) - f(u) = 6u(u_1 - u) + 3(u_1 - u)^2,$$

$$\frac{f(u + (u_1 - u)) - f(u)}{u_1 - u} = 6u + 3(u_1 - u).$$

Also:

$$\frac{dy}{du} = 6\,(x^3 + ax^2).$$

(Dies erhalten aus $f(u)$ oder $y = 3u^2$.)

[Entwickeln wir nun ebenso b), nämlich:]

b) $f(x)$ oder $u = x^3 + ax^2$,

$$f(x+h) = (x+h)^3 + a\,(x+h)^2,$$

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^3 + a\,(x+h)^2 - x^3 - ax^2 =$$

$$\left.\begin{aligned} &= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 \\ &+ ax^2 + 2axh + ah^2 \end{aligned}\right\{ \begin{aligned} &-x^3 + \\ &-ax^2 = \end{aligned}$$

$$= (3x^2 + 2ax)\,h + (3x + a)\,h^2 + h^3,$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 3x^2 + 2ax + (3x + a)\,h + h^2.$$

Setzen wir nun h vorn $= 0$, so auf zweiter Seite:

$$\frac{0}{0} \text{ oder } \frac{du}{dx} = 3x^2 + 2ax.$$

Die abgeleitete Funktion $3x^2 + 2ax$ aber schon fertig enthalten in

$$f(x+h) = (x+h)^3 + a\,(x+h)^2,$$

denn diese liefert

$$x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + ax^2 + 2axh + ah^2.$$

Also

$$x^3 + ax^2 + (3x^2 + 2ax)\,h + (3x + a)\,h^2 + h^3.$$

Sie erscheint bereits als fertiger Koeffizient von h. Diese Abgeleitete ist also nicht erhalten durch Differentiation, sondern durch Wachstum von $f(x)$ zu $f(x + h)$ und daher von $x^3 + ax^2$ zu $(x + h)^3 + a\,(x + h)^2$.

Sie ist einfach erhalten dadurch, dass wenn x zu $x + h$ wird, wir auf der andern Seite Binome in $x + h$ von bestimmten Grad erhalten, deren zweites, mit h behaftetes Glied die abgeleitete Funktion von u oder $f'(u)$ fix und fertig enthält.

Alle weiteren Prozeduren dienen nur dazu, die so von vornherein gegebne $f'(x)$ zu befreien von ihrem eignen Koeffizienten h und von allen andern Gliedern.

Die Gleichung:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \text{etc.}$$

liefert Doppeltes: erstens den Zähler der ersten Seite als Differenz der

Hence [wenn] $u_1 - u$ im ersten Glied $= 0$, so

$$\frac{dy}{du} = 6u + 0 = 6u.$$

Dies zeigt, dass wenn von vornherein $f(u)$ zu $f(u + (u_1 - u))$ [wird], so dass sein Inkrement als positives zweites Glied eines bestimmten Binoms auf der zweiten Seite erscheint, das zweite Glied, das durch den binomischen Lehrsatz mit $(u_1 - u)$ oder h behaftet, sofort der gesuchte Koeffizient ist. Ist das zweite Glied polynomisch, wie es wird

in $x^3 + ax^2$, welches wird $(x + h)^3 + a(x + h)^2$,

oder

$$(x + (x_1 - x))^3 + a(x + (x_1 - x))^2,$$

so sind nur die mit $x_1 - x$ in der ersten Potenz, alias h in der ersten Potenz behafteten Glieder zu summieren als Koeffizient von h oder $x_1 - x$; und wir haben wieder den Koeffizienten fertig.

Dies Resultat zeigt:

1) dass, wenn in der D'Alembertschen Entwicklung für $x_1 - x = h$ umgekehrt gesetzt wird $h = x_1 - x$, damit absolut nichts an der Methode selbst geändert wird, sondern nur klarer die Methode hervortritt, durch $f(x + h)$ oder $f(x + (x_1 - x))$ sofort für den algebraischen Ausdruck auf der andern Seite Binome zu erhalten statt der Originalfunktion, wie z. B. statt im gegebnen Fall $3u^2$.

Das zweite Glied, das man so findet, behaftet mit h oder $x_1 - x$, ist die fertige erste abgeleitete Funktion. Die Aufgabe besteht nun, sie von h oder $x_1 - x$ zu befreien, was sich leicht macht. Die abgeleitete Funktion ist fertig da; sie wird also nicht durch $x_1 - x = 0$ gefunden, sondern befreit von ihrem Faktor $(x_1 - x)$ und Zubehör. Wie sie durch einfache Multiplikation (binomische Entwicklung) gefunden als zweites Glied [behaftet mit dem Faktor] $x_1 - x$, [so] wird sie schliesslich durch Division auf beiden Seiten mit $x_1 - x$ von letztrem befreit.

Die Mittelprozedur besteht aber in der Entwicklung der Gleichung

$$f(x + h) - f(x) \text{ oder } f(x + (x_1 - x)) - f(x) = [\ldots].$$

Diese Gleichung hat hier keinen [andern] Zweck, als die Ausgangsfunktion verschwinden zu machen auf der zweiten Seite, da die Entwicklung [von] $f(x + h)$ notwendig $f(x)$ enthält mit ihrem durch das Binom entwickeltem Inkrement. Diese [Glieder, die die Originalfunktion ausmachen,] werden also aus der zweiten Seite entfernt.

Was also geschieht z. B. in

$$(x+h)^3+a(x+h)^2-x^3-ax^2,$$

ist, die ersten Glieder x^3 und ax^2 aus den Binomen $(x+h)^3 + a(x+h)^2$ zu entfernen; wir erhalten so die mit h oder $x_1 - x$ behaftete schon fertige abgeleitete Funktion als erstes Glied der Gleichung.

Die erste Differentiation auf der zweiten Seite ist nichts als einfache Subtraktion der Originalfunktion von ihrem angewachsnen Ausdruck, gibt uns also das Inkrement, um das sie gewachsen ist, dessen erstes, mit h behaftetes Glied schon die fertige abgeleitete Funktion. Die andern Glieder können nichts enthalten als Koeffizienten von h^2 etc. oder $(x_1 - x)^2$ etc.; sie werden durch die erste Division mit $x_1 - x$ auf beiden Seiten um eine Potenz erniedrigt, während das erste Glied ohne h auftritt.

2) Der Unterschied von der Methode $f(x_1) - f(x) =$ etc. liegt darin, dass wir z.B. erhalten, wenn

$$f(x) \text{ oder } u = x^3 + ax^2,$$

$$f(x_1) \text{ oder } u_1 = x_1^3 + ax_1^2,$$

der erste Anwachs der Variablen x uns keineswegs von vornherein das $f'(x)$ fertig fabriziert liefert.

[Bei der Bildung der Differenz $f(x_1) - f(x)$ erhalten wir]

$$f(x_1) - f(x) \text{ oder } u_1 - u = x_1^3 + ax_1^2 - (x^3 + ax^2).$$

Hier handelt es sich keineswegs darum die Originalfunktion wieder zu entfernen, da $x_1^3 + ax_1^2$ in keiner Form x^3 und ax^2 enthält. Im Gegenteil liefert uns diese erste Differenzengleichung ein Entwicklungsmoment, nämlich die Verwandlung jedes der beiden ursprünglichen Glieder in Differenzen von [Potenzen von] x_1 und x.

Nämlich:

$$= (x_1^3 - x^3) + a(x_1^2 - x^2).$$

Es ist nun klar, dass, wenn wir jedes dieser beiden Glieder wieder zerlegen in Faktoren von $x_1 - x$, wir als Koeffizienten von $x_1 - x$ Funktionen in x_1 und x erhalten, nämlich:

$$f(x_1) - f(x) \text{ oder } u_1 - u = (x_1 - x)(x_1^2 + x_1 x + x^2) + a(x_1 - x)(x_1 + x).$$

Dividieren wir dies durch $x_1 - x$, also auch die linke Seite, so:

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \text{ oder } \frac{u_1 - u}{x_1 - x} = (x_1^2 + x_1 x + x^2) + a(x_1 + x).$$

Durch diese Division haben wir die vorläufig Abgeleitete erhalten. Jeder ihrer Teile enthält Glieder in x_1.

Wir können also schliesslich nur die abzuleitende erste Funktion in x erhalten, wenn wir $x_1 = x$ setzen, also $x_1 - x = 0$, dann wird:

$$x_1^2 = x^2, \ x_1 x = x^2,$$

so:

$$(x_1^2 + x_1 x + x^2) = 3x^2 \text{ und } x_1 + x = x + x = 2x;$$

also:

$$a\,(2x) = 2xa.$$

Resultat auf der andern [Seite]

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{du}{dx} = \frac{0}{0}.$$

Hier wird also die abgeleitete Funktion erst durch das Setzen von $x_1 = x$, also $x_1 - x = 0$ erhalten. $x_1 = x$ liefert das schliessliche positive Resultat in der wirklichen Funktion x.

Aber $x_1 = x$ liefert auch $x_1 - x = 0$ und daher zugleich, neben diesem positiven Resultat, auf der andern Seite das symbolische $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx}$.

Wir hätten von vornherein sagen können: wir müssen schliesslich eine *Abgeleitete* in x_1 und x erhalten. Diese kann nur zur Abgeleiteten in x sich wandeln, sobald $x_1 = x$ gesetzt wird, aber $x_1 = x$ setzen ist dasselbe wie $x_1 - x = 0$ setzen, welche Nullifikation sich positiv ausdrückt in der Formel $x_1 = x$, die zur Verwandlung der Abgeleiteten in Funktion von x nötig, während ihre negative Form $x_1 - x = 0$ uns das Symbol liefern muss.

3) Selbst wenn diese Behandlung von x, wo nicht ein Inkrement z. B. $x_1 - x = \Delta x$ od. h selbständig neben ihm eingeführt wird, schon bekannt, was sehr wahrscheinlich und wovon ich mich auf dem Museum durch Nachsehn von J. Landen überzeugen werde, so kann ihr wesentlicher Unterschied nicht begriffen worden sein.

Was diese Methode aber von Lagrange unterscheidet, dass in ihr wirklich differenziert wird,' daher auch die Differentialausdrücke auf der symbolischen Seite entspringen, während bei ihm die Ableitung nicht die Differentiation algebraisch darstellt, sondern die Funktionen algebraisch direkt aus dem Binom ableitet und ihre differentielle Form nur «der Symmetrie» halber angenommen wird, weil aus dem Differentialcalculus bekannt, dass die erste abgeleitete Funktion $= \frac{dy}{dx}$, die zweite $= \frac{d^2y}{dx^2}$ etc.

Anmerkung des Herausgebers

1 Man beachte hier den Unterschied von Differentiation und Ableitung, der in der Unterscheidung der Symbole $\frac{dy}{dy}$ und f'(x) ausgedrückt wird. In den mathematischen Manuskripten wurde immer wieder die Differenz beider thematisiert (vgl. etwa S. 78 und 108) Wir haben auf eine Diskussion dieses Aspekts verzichtet, weil er für die in der Einleitung formulierten allgemeinen methodologischen Probleme nicht so relevant ist. Wohl aber zeigt er wiederum deutlich die Interpretiertheit der Symbole, den intensionalen Gehalt der Formalismen bei Marx.